Измерения Милликеном заряда электрона и математическая статистика

В.Н. Тутубалин, Ю.М. Барабашева, Г.Н. Девяткова, Е.Г. Угер

Введение

При рассказах о тех или иных событиях, имевших важное значение в истории науки, особый интерес вызывают случаи, когда речь фактически идет об откровении или чуде, хотя в вещах, связанных с наукой, обычно избегают употребления религиозных терминов. Но создатели удачных теорий нередко описывают этот процесс, как ниспосланное свыше откровение, в то время как неожиданно высокая точность определения какой-нибудь важной константы не может быть объяснена иначе, как чудом. Например, в книге [1] описывается, как Эратосфен (уже располагавший откровением о том, что Земля имеет форму шара) определил размер этого шара. Ошибка этого определения (согласно [1]) была менее 1%, хотя в основе расчета лежала величина расстояния между городами Александрией и Сиеной (современный Асуан), определявшаяся по оценкам погонщиков верблюжьих караванов, конечно, не с точностью в 1%. (И притом по дороге, а не по дуге меридиана). Не иначе как Высший Разум счел своевременным открыть людям истинный размер Земли и избрал для этой цели Эратосфена. По крайней мере, когда в 1617 году Снеллиус применил теоретически корректный способ триангуляции для измерения дуги меридиана, он преуменьшил истинный размер Земли примерно на 3.5% - гораздо хуже, чем у Эратосфена.

Что же касается измерений Милликена, то наш интерес к ним связан, прежде всего, с преподаванием математической статистики. Можно ли на этих данных проиллюстрировать применимость (или неприменимость) классической теории ошибок для оценки точности полученного результата? Иными словами, содержит ли доверительный интервал, построенный по данным Милликена, современное значение заряда электрона (известное теперь с очень большой точностью)?

Например, построение указанного доверительного интервала рассматривается в учебнике [2] и задачнике [3], однако, без указания на то, что полученный интервал не мешало бы проверить – содержит ли он истинное значение или нет. Вдобавок, той таблицы отдельных наблюдений заряда электрона e, которая приводится в [2] и [3] в качестве данных Милликена, в итоговой работе Милликена [6] вообще нет. Есть, правда, таблица значений величины $e^{2/3}$, из которой значения e получаются возведением в степень 3/2, но эта таблица отвечает немного не тому значению вязкости воздуха, на котором в конце концов остановился Милликен. Сам же Милликен справедливо считает слишком узким тот доверительный интервал, который рекомендует теория ошибок, и получает свою оценку точности результата, а именно ±0.2%. Но эта оценка получена весьма странным обращением с предполагаемыми систематическими ошибками. Однако самое печальное состоит в том, что современного значения заряда электрона не содержат как доверительный интервал теории ошибок, так и доверительный интервал Милликена. Ошибка значения Милликена составляет около 0.6%.

Это было известно уже в 50-е годы прошлого века (см. справочник [4]), и существовало дежурное объяснение этого факта, которое состоит в том, что Милликен использовал неверное (заниженное) значение вязкости воздуха. Желательно, однако, проверить, действительно ли это объяснение верно в количественном (а не только в качественном) смысле. Расчетные формулы Милликена таковы, что заряд электрона пропорционален вязкости воздуха в степени 3/2. Казалось бы, ничего не стоит пересчитать его результат на современное нам значение вязкости воздуха, но этому препятствует то обстоятельство, что с нужной точностью (не хуже 0.1%) значение вязкости воздуха не известно. Поэтому мы обращаем задачу: с помощью известного (современного) значения заряда электрона оцениваем значение вязкости воздуха по данным опытов Милликена, пользуясь в дальнейшем полученным значением вязкости на правах истинного.

Помимо этого возникла следующая коллизия. Милликен имел неосторожность написать в своей итоговой работе [6], что он не производил какой-либо выборки из своих наблюдений, а приводит все результаты, полученные в течение 60 последовательных дней над движением 58 заряженных капель масла. Однако в 1978 году историк науки Дж. Холтон (см. [8]) разыскал в архивах Калифорнийского технологического института два блокнота, содержащих первичные записи Милликена. О, ужас! Капель масла, над которыми производились эксперименты с помощью того оборудования, которое описано в [6], оказалось не 58, а примерно 140. Получилось, что великий ученый явным образом солгал, написав, что он включил результаты всех экспериментов. Последовало обсуждение в печати моральных качеств Милликена, которое резюмировано, например, в [9].

В настоящее время блокноты Милликена выложены в интернете. Но качество изображения настолько скверное, что детальная работа с этими данными невозможна.

На некоторых листах блокнотов, имеются резолюции Милликена. В тех случаях, когда Милликен полагал, что опыт с данной каплей вышел хорошо, резолюция имеет примерно такой вид: «Красота! Опубликовать». В других случаях отмечаются недостатки опыта (например, «Появилась конвекция»). Всего Милликен отобрал для публикации результаты измерений лишь для 16 капель (из 58), но в этих случаях приводятся данные именно первичных измерений времени падения капли (под действием силы тяжести при выключенном электрическом поле) и времени её подъема при включенном поле. Каждая пара таких измерений позволяет вычислить оценку заряда электрона. Поскольку над каждой каплей производилось несколько наблюдений её падения и подъема, то для 16 капель набирается в общей сложности 229 определений заряда электрона. Эти данные и анализируются в нашей работе с помощью ряда приемов математической статистики. Основные выводы состоят в следующем.

При проверке статистической однородности того или иного материала основная трудность состоит в том, на какие именно группы надо разделить материал с ориентацией на возможные нарушения однородности. В случае наблюдений Милликена такое разделение очевидно: надо объединить в группы наблюдения над одной и той же каплей. При такой группировке нами была определенно установлена статистическая неоднородность материала. Милликен неоднократно говорит о хорошем согласии результатов опытов над разными каплями. Но если иметь в виду его высокие требования к точности определения заряда электрона (ошибка не более 0.1%), то такого согласия нет. Часть наблюдений сдвинута вправо от истинного значения, а часть – влево.

Если же поправить значение вязкости воздуха и устранить арифметические ошибки, которыми, надо сказать, изобилуют вычисления Милликена, то наблюдается следующее чудо. Милликен сумел так отобрать 16 капель для публикации первичных данных, что эти сдвиги вправо и влево уравновешиваются, и в среднем получается правильный результат с точностью лучшей, чем 0.1%. Более того, доверительный интервал, построенный формальным применением правил теории ошибок, содержит истинное значение заряда электрона. Таким образом, Милликена надо не столько стыдить за цензуру части наблюдений, сколько прославлять за способность совершить чудо.

Конечно, чудо – вещь тонкая. Безупречно доказать, что действительно произошло чудо, невозможно. Например, чудо Эратосфена зависит от того, каким именно стадием пользовался он в качестве меры длины. В разных местностях стадий имел разные длины, отличающиеся на десятки процентов, а каким именно стадием пользовался Эратосфен – не известно. Можно выбрать такой стадий, что при переводе в современные меры длины ошибка Эратосфена окажется меньше одного процента. Точно так же из имеющихся в литературе значений вязкости воздуха можно, опираясь на данные Милликена, выбрать такое значение, при котором получается вышеописанное чудо. Однако для демонстрации возможностей математической статистики лучше с чудом не связываться, а предложить что-то более надежное.

В настоящее время никто особенно не верит в оценку точности с помощью доверительных интервалов. Но этот метод, как и другие методы теории ошибок, может позволить выявить нестабильность свойств измерительной системы. Оказывается, что в случае наблюдений Милликена среднеквадратический разброс ошибок в измерении интервалов времени растет примерно пропорционально *квадрату* истинного значения измеряемого интервала. Столь быстрый рост можно объяснить лишь изменением во времени свойств измерительной системы. Этот вывод является математико-статистическим, потому что он использует только числа, полученные в первичных измерениях Милликена. Но он прекрасно коррелирует с его замечаниями, из которых на качественном уровне вытекает нестабильность свойств установки. В частности, в работе [6] замечается, что прибор в процессе измерений разбирался и собирался несколько раз. Однако такая процедура представляет собой тяжелую и грязную работу (поскольку основные части прибора погружены в бак с машинным маслом для выравнивания температуры). Экспериментатор мог решиться на такое только в случае утраты доверия к работе прибора.

1. Принципиальная сторона теории и эксперимента

В работах Милликена [5] и [6] описаны два сходных измерительных прибора, из которых более поздний является усовершенствованным вариантом более раннего. Милликен фактически дезавуирует более ранние измерения на том основании, что использовалась недостаточно совершенная оптическая система. Однако некоторые детали устройства прибора работы [6] можно понять, лишь обратившись к работе [5].

Основной частью измерительного прибора являются две круглые латунные пластины диаметром 22 см, закрепленные друг над другом с помощью эбонитовых распорок на расстоянии h=16 мм (с допуском не хуже 0.01 мм). Обращенные друг к другу стороны этих пластин тщательно механически обработаны. По краю пластины обернуты эбонитовой лентой, так что между ними получается замкнутое пространство. Это устройство из двух пластин, которое можно называть также «конденсатором», помещено в сосуд, в котором можно менять давление воздуха. Последнее измеряется ртутным манометром с точностью до 0.01 см рт.ст. В сосуде и ленте предусмотрены стеклянные окошки для освещения и наблюдений. Сам же сосуд помещен в бак, наполненный машинным маслом, с целью выравнивания температуры (для избежания конвекции воздуха в пространстве между пластинами).

В центре верхней пластины проделано маленькое отверстие, по мере надобности открываемое или закрываемое электромагнитной задвижкой, а над верхней пластиной можно разбрызгивать капли часового масла.[1]

Капли получающегося масляного тумана опускаются под действием силы тяжести и время от времени попадают по одной в отверстие на верхней пластине. В конце концов они оказываются в пространстве между пластинами. Там предусмотрено такое освещение, что капля видна, как сияющая (brilliant) звездочка на черном фоне (однако нагрев воздуха этим освещением, который мог бы вызвать конвективные движения, по возможности, исключен). Эту каплю предстоит несколько раз гонять вниз и вверх, включая и выключая электрическое поле между пластинами.

Сначала экспериментатор должен убедиться в том, что капля имеет достаточный электрический заряд (нужного знака), чтобы при включении электрического поля между

[1] Масло - это одно из изобретений Милликена: оно взято вместо воды, потому что масло испаряется несравненно медленнее, чем вода. Согласно [1], Милликен описывал идею употребить масло вместо воды как откровение свыше.

пластинами она перестала падать вниз и стала подниматься наверх. Если это так, то опыт возможен, а если не так, то капля вскоре упадет на нижнюю пластину, пристанет к ней и перестанет существовать. Если капля годится для опыта, то сначала измеряется время падения капли под действием силы тяжести между двумя рисками оптической системы, что соответствует определенному пути d=1.021 см. Затем, не давая капле достигнуть нижней пластины, экспериментатор подключает к пластинам электрическую батарею (разность потенциалов V порядка нескольких тысяч вольт). Если капля имеет достаточный электрический заряд нужного знака, то под действием однородного поля между пластинами капля перестает падать и начинает подниматься. Измеряется время, в течение которого капля проходит путь d в обратном направлении (т.е. снизу вверх). Свой электрический заряд капля могла получить при разбрызгивании масла в результате трения, либо она могла поймать из воздуха электроны или положительные ионы. Предусмотрена возможность ионизации воздуха (излучением радия, либо рентгеновским излучением) для скорейшего изменения заряда капли. Как только подключается V, заряженные частицы, находящиеся в воздухе и не севшие на каплю, практически мгновенно притягиваются к пластинам, так что свой путь наверх капля масла совершает с постоянным зарядом. Его можно определить с помощью закона Стокса, устанавливающего зависимость силы сопротивления движению шара в вязкой среде от его размера, воспользовавшись известным значением вязкости воздуха. (Радиус капли определяется, в принципе, по времени ее падения.) Милликен не сомневался в том, что этот заряд есть целое кратное некоего элементарного электрического заряда (который и есть заряд электрона), однако целочисленный множитель остается неизвестным. Но он выдвигает следующее остроумное соображение. Если после достижения верхней риски выключить V и дать капле снова падать под действием силы тяжести (а воздух снова ионизировать), то заряд капли может измениться. Вновь включаем V и определяем новый суммарный заряд. Весьма вероятно, что после нескольких таких путешествий капли с переменным числом элементарных зарядов окажется, что наибольший общий делитель этих чисел зарядов (в разных путешествиях капли) окажется равным единице. Таким образом, вычисляя после каждого путешествия капли наверх ее суммарный заряд и беря наибольшую общую меру отрезков вещественной оси, отвечающих этим числам, мы найдем элементарный заряд.[2]

При простой принципиальной схеме эксперимента реальная работа экспериментатора должна была, однако, напоминать работу циркового жонглера. Вероятно, отмеренный путь капли $d \approx 1$ см размещался в середине между пластинами, т.е. сверху и снизу оставалось по 3 мм. Движение капли вниз занимало (в большинстве случаев) время от 10 до 40 сек, т.е. после прохождения каплей нижней риски экспериментатору оставалось от 3 до 12 сек на включение поля и начало наблюдений за подъемом капли. В некоторых случаях время падения капли было еще меньше – около 5 секунд. Значит, примерно за полторы секунды надо было записать измеренное время падения и включить поле для подъема капли. После окончания подъема надо было отключить поле и подумать об ионизации воздуха на время падения капли. Эксперимент с одной каплей включал примерно 10-20 падений и подъемов и продолжался порядка часа. Конечно, такая работа требует помощника. В эксперименте, описанном в [5], помощником был Флетчер (Harvey Fletcher), а в эксперименте, описанном в [6], - Ли (J. Yinbong Lee). Милликен выражает им благодарность за most able assistance (как это будет по-русски – «весьма квалифицированная помощь»?) Кстати, согласно [1], Флетчер претендовал на первенство в озарении о том, что воду надо заменить маслом.

В интернете можно найти фотографии экспериментальной установки Милликена. На них поражает беспорядок, в котором навалены на столе с установкой разные инструменты, нужные для проведения опытов.

[2] Милликен вместо общей меры говорит о наибольшем общем делителе, что не совсем удачно для нецелых чисел.

2. Математические детали

Капли в опытах Милликена, формально говоря, двигались ускоренно, поскольку при включении поля направление движения менялось на противоположное. Но из-за крайне малой массы капель вязкости воздуха хватало на то, чтобы это ускоренное движение практически мгновенно превратить в равномерное, при котором действующие на каплю силы уравновешиваются вязким трением.

Закон Стокса для силы сопротивления среды при ламинарном обтекании движущегося шара имеет следующий вид:

$$W = 6\pi\eta a v \qquad (1)$$

где W - сила сопротивления, η - коэффициент динамической вязкости, a - радиус шара, v - скорость его движения. При движении капли вниз под действием силы тяжести $W = P$, где P - вес капли в воздухе (с учетом архимедовой выталкивающей силы), а скорость v обозначается как v_1. Поскольку капля - это шар, радиус которого обозначен a, имеем следующее уравнение для определения a:

$$6\pi\eta a v_1 = P = \frac{4}{3}\pi a^3(\sigma - \rho)g, \qquad (2)$$

где σ - плотность масла, ρ - плотность воздуха, g -ускорение свободного падения, v_1 - измеренная в эксперименте скорость падения. (У Милликена вес капли в воздухе P неудачно обозначен как mg, что даже повлекло небольшую ошибку в работе [5].)

При подъеме капли действующая на нее сила есть $e_1 nF - P$, где e_1 - элементарный заряд, n - число таких зарядов в капле, F - напряженность электрического поля. Следовательно, имеем уравнение

$$6\pi\eta a v_2 = e_1 nF - P, \qquad (3)$$

в котором v_2 - скорость подъема. Складывая (2) с (3) и выражая a из (2), получаем следующее выражение для определения e_1:

$$e_1 = 9\sqrt{2}\pi\frac{1}{nF}(g(\sigma - \rho))^{-1/2}\eta^{3/2}v_1^{1/2}(v_1 + v_2). \qquad (4)$$

При этом скорости падения и подъема выражаются через соответствующие времена по формулам $v_1 = \frac{d}{t_g}, v_2 = \frac{d}{t_F}$, где t_g - время падения под действием силы тяжести, t_F - время подъема под действием электрического поля.

Поправка Милликена к закону Стокса. Согласно [5], опыты по измерению заряда электрона, проводимые с каплями разных размеров, давали не вполне согласующиеся результаты. Милликен предложил изменить закон Стокса для очень малых тел, размеры которых сравнимы со средней длиной свободного пробега молекул газа. Именно, скорость, определяемая из закона Стокса, должна быть умножена на поправочный множитель, равный $(1 + A\frac{l}{a})$, где l - средняя длина свободного пробега, a - радиус капли, константа же A подбирается по экспериментальным данным. Впрочем, из-за некоторой неопределенности в вычислении длины свободного пробега, Милликен записывает этот множитель в виде $(1+\frac{b}{pa})$, где p - давление воздуха в пространстве между пластинами (где движется капля). (Фактически по экспериментальным данным подбирается константа b.) При том способе вычисления l, который принят Милликеном (см. [6], стр. 138), значение A=0.874. Если a измерено в см, а p - в см рт. ст. при 23^0 С (на стр.139 работы [6] ошибочно указаны mm. Hg), то рекомендуется значение b=0.0006254.

Эквивалентно можно сказать, что правые части соотношений (2) и (3) умножаются на $(1+A\frac{l}{a})=(1+\frac{b}{pa})$. Но тогда правая часть соотношения (4) умножается на этот множитель в степени 3/2. Иными словами, правильное значение заряда электрона *e* дается формулой

$$e = (1+\frac{b}{pa})^{-\frac{3}{2}} e_{1.} \tag{5}$$

Впрочем, Милликен предпочитает пользоваться следующей формулой[3]

$$e_1^{\frac{2}{3}} = (1+\frac{b}{pa})e^{\frac{2}{3}} \tag{6}$$

Линейный вид поправки (6) обоснован Милликеном вполне убедительно, но численные значения коэффициента *A* (или, эквивалентно, коэффициента *b*) следовало бы проверить. За отсутствием данных мы не смогли этого сделать и потому приняли без изменений значения, указанные Милликеном.

Определение радиуса капли *a* при известном элементарном заряде *e* и известном числе *n* элементарных зарядов на капле. Независимо от поправки Милликена к закону Стокса скорость движения капли пропорциональна действующей на нее силе. При падении капли эта сила равна весу капли *P*, а при подъеме капли равна разности *(enF - P*), где *F* - известная напряженность электрического поля при подъеме капли. Следовательно,

$$\frac{P}{enF-P}=\frac{v_1}{v_2}=\frac{t_F}{t_g}, \tag{7}$$

где v_1 и v_2 - соответственно, скорости падения и подъема (на известное расстояние *d*), а t_F и t_g - время подъема и падения. Отсюда

$$P=\frac{enF}{1+t_g/t_F} \tag{8}$$

а зная *P* и используя (2), находим *a* по формуле

$$a=\left\{\frac{3P}{4\pi(\sigma-\rho)g}\right\}^{1/3} \tag{9}$$

Формулы (8) и (9) не зависят ни от поправки Милликена к закону Стокса, ни от вязкости воздуха и могут быть вычислены для любой пары наблюдений времени падения и подъема, относящихся к одной и той же капле. Разумно брать, конечно, соседние по времени падение и подъем, чтобы капля не могла заметно измениться (например, за счет испарения масла).[4]

3. Проблема измерения интервалов времени

В книге М.Уилсона [11] можно найти следующий рассказ. Как-то раз сидели Милликен с Майкельсоном на крылечке у лаборатории. Милликен спросил старшего коллегу: "А с какой же точностью ты измерил скорость света?" На что Майкельсон отвечал: "Думаю, что

---

[3] Даже в окончательной таблице XX работы [6] он дает не значения *e*, а значения $e^{2/3}$ Чтобы получить данные, приводимые, например, в [2] и [3], нужно числа, стоящие в последнем столбце таблицы XX, возвести в степень 3/2.

[4] Первоначально при проведении наших расчетов мы полагали плотность масла σ равной 0.9199 г/см³, однако, из [10] следует, что Милликен учитывал зависимость плотности от температуры в виде: σ= 0,9199*[1+0.0008* (23-t°C)]. Результаты расчетов, приводимых здесь, сделаны с учетом этой зависимости. Заметим, что они практически не отличаются от результатов для σ= 0.9199.

с точностью до одной десятитысячной". Тогда Милликен сказал: "А я измерю заряд электрона с точностью до одной тысячной, или я ничего не стою".

Независимо от того, верен рассказ или нет, по работам [5] и [6] ясно, что поставлена именно такая задача - измерить заряд электрона с точностью порядка 1/1000 или 0.1%. Поскольку, согласно формуле (4), искомое значение выражается через время прохождения каплей определенного расстояния, то эти интервалы времени должны измеряться с точностью не хуже 0.1%. Если, например, время падения капли составляет около 10 сек, то измерять его нужно с точностью порядка 0.01 сек. Или, рассчитывая на усреднение большого числа наблюдений, можно измерять и грубее, но, во всяком случае, без систематической ошибки.

В работе [5] сначала приводятся данные измерений времени, полученные с помощью секундомера, точность которых не превышает 0.1 сек. Затем Милликен и Флетчер, который помогал ему в работе, перешли к измерению коротких промежутков времени с помощью хронографа, а в работе [6] измерения выполнялись с помощью хроноскопа Гиппа (Hipp chronoscope). Хронограф позволяет измерять интервалы времени с точностью до 0.01 сек, а хроноскоп – даже с точностью до 0.002 сек. Но это интервалы времени между срабатываниями электромагнитов, отвечающими началу и концу измеряемого интервала. По-видимому, на уровне техники начала XX века эти электромагниты могли приводиться в действие только нажатием на кнопку в тот момент, когда экспериментатор видел то или иное событие (пересечение движущейся каплей верхней или нижней риски в оптической системе). Можно лишь надеяться на то, что время реакции экспериментатора было одинаковым как для верхней, так и для нижней риски. Более того, при проверке хроноскопа по точным часам оказалось, что он имеет систематическую ошибку и разброс показаний. Так, при измерении промежутка 30 сек (18 наблюдений) средняя ошибка составила (-0.031) сек (т.е. нужна поправка, равная +0.1% от измеряемой величины) при стандартном отклонении тоже 0.030 сек. Средние ошибки при измерении других интервалов даны в таблице III работы [6] (число наблюдений и стандартные отклонения не известны). При рассмотрении таблицы мы сталкиваемся с тем фактом, что арифметические вычисления представляли для Милликена серьезную проблему. Перевод в проценты (от измеряемой величины) необходимых поправок хроноскопа выполнен не совсем верно. Поправленные нами значения приведены в таблице 1 (графа «Верное значение»). Далее с арифметическими ошибками у Милликена мы будем сталкиваться постоянно.

Таблица 1. Поправки хроноскопа: значения по Милликену и верные значения

Clock Interval, Sec.	Chronoscope Interval.	Corr'n Applied Per Cent.	Верное значение
6	6.0146	-0.26	-0.24
10	10.0018	0.00	-0.02
16	16.008	0.00	-0.05
20	19.9835	0.07	0.08
30	29.9695	0.10	0.10
40	39.9436	0.14	0.14
60	59.9072	0.16	0.15
114	113.795	0.20	0.18
120	119.782	0.20	0.18

Мы подобрали кривую, удовлетворительно сглаживающую верные значения поправок хроноскопа (см. рис. 1). Уравнение кривой следующее:

$$y = -0.0067 + 0.0000767x + 0.005785\ln x - 0.002588\sqrt{x}.$$

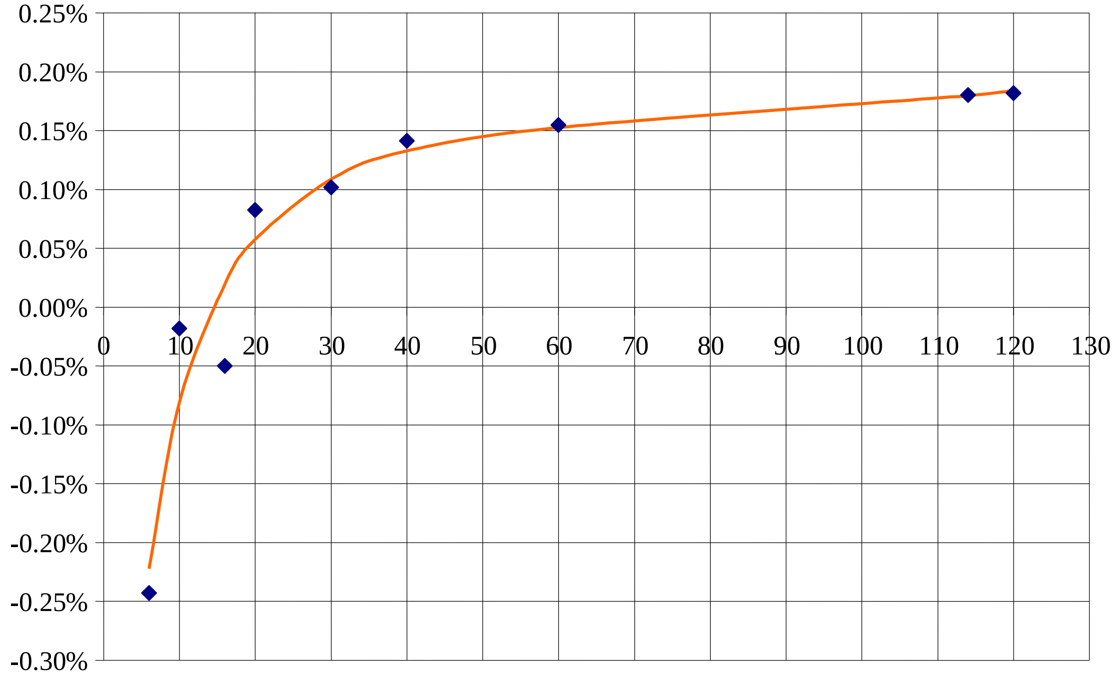

Рис.1 Поправка хроноскопа y (в %) в зависимости от измеряемого интервала времени x (в сек).

Интервалы времени, большие 150 сек, в работе [6] измерялись секундомером, так что они не подлежат поправке, установленной для хроноскопа. Проблемой является экстраполяция найденной зависимости в область x<6 сек, для которой совсем нет данных. В этих случаях мы пользовались теми значениями, которые Милликен указывает в качестве скорректированных, а если их не было, применяли формально ту же кривую.

4. Об арифметических ошибках у Милликена

Возможность использовать компьютер для производства арифметических вычислений делает нас – по отношению к ученым предшествующих поколений – равными если не богам, то полубогам. Проверка арифметики нередко обнаруживает существенные ошибки. Впрочем, что касается вычислений Милликена, то и без компьютера видно, что он не замечает даже грубых ошибок. Например, в первой строке таблицы XX из работы [6] (капля №1) указан радиус капли $a = 58.56\times10^{-5}$ см и время падения $t_g = 4.363$ сек. Во второй строке таблицы (капля №2) указано $a = 32.64\times10^{-5}$ см и время падения $t_g = 8.492$ сек. Однако время падения обратно пропорционально квадрату радиуса капли (это приблизительно верно и при учете поправки к закону Стокса), и следовательно, если значение a для второй капли верно, то для первой капли должно быть (в единицах 10^{-5} см) приблизительно $a = 32.64\times(8.492/4.363)^{1/2} = 45.54$. Действительно, для капли №1 есть первичные данные (таблица XVI), по которым получается $a = 46.06\times10^{-5}$ см.

Другой пример. В тексте работы [6] (стр. 138) подробно сравниваются данные для капель №№27 и 28. При этом утверждается, что диаметр капли №27 примерно в 7 раз больше, чем диаметр капли №28. Иными словами, для капли №28 используется данное в таблице XX значение $a = 4.69\times10^{-5}$. Но такое различие в диаметрах привело бы к различию времен падения в $7^2 = 49$ раз, в то время как это различие составляет лишь 84.270/9.408 = 8.96 раза.

Понятно, что аккуратная арифметика – не призвание Милликена.

Если же говорить о мелких ошибках, обнаруживаемых с помощью компьютера, то их достаточно много. Например, можно сравнить два способа вычисления поправки к закону

Стокса: по формуле $(1+A\frac{l}{a})$ и по формуле $(1+\frac{b}{pa})$. При значениях A = 0.874 и b = 0.0006254 по этим формулам должны получиться совпадающие значения. Но что значит "совпадающие значения" при конечной точности вычислений? Поскольку речь идет о получении результата с точностью 0.1% = 1/1000, промежуточные вычисления должны производиться хотя бы с точностью на один порядок большей, т.е. 1/10000. Между тем, по данным таблицы XX получается 8 (из 58) случаев расхождения более, чем на 1/10000, причем в одном случае расхождение достигает 0.0082, т.е. 0.8%.

5. Некоторые исторические сведения

Исследования Милликена неоднократно комментировались историками науки. Среди таковых Роберт Холтон (см.[8], глава 2) был, по-видимому, первым, кто обнаружил в архиве Калифорнийского технологического института блокноты Милликена с записями первичных результатов опытов. Холтон интересовался, главным образом, философско-психологическим вопросом – о роли в науке так называемых «тем», т.е. некоторых представлений, первоначальных по отношению к конкретному научному исследованию. В данном случае речь идет о том, что Милликен предполагал заряд электрона некоторой постоянной величиной, которую надо только возможно точнее измерить, а Ф. Эренхафт (Felix Ehrenhaft, университет Вены) полагал, что в природе существуют субэлектроны, несущие на порядок меньший заряд, или даже, что величина заряда может принимать непрерывно меняющиеся значения. В частности, Эренхафт язвил Милликена следующим образом. Рассчитав по данным одной ранней публикации Милликена заряды отдельных капель, он нанес их на числовую ось. При этом оказалось, что некоторые заряды различаются на величину, существенно меньшую, чем заряд электрона (оцененный Милликеном путем усреднения всех результатов по отдельным каплям). Значит, либо существуют субэлектроны, либо дело в ошибках наблюдения, которые сделали одинаковые заряды несколько отличающимися. В зависимости от априорной «темы», которой держался исследователь, можно было выбирать то или иное объяснение. Надо еще сказать, что при начале этой дискуссии Эренхафт котировался в мире физиков выше, чем Милликен, у которого еще не было серьезных физических работ.

Следует сказать, что Холтон объявляет своей целью «заглянуть в замочную скважину» лаборатории ученого, чтобы понять, как он работал на самом деле. Опубликованные работы так приглажены, что для этой цели не годятся. И вот удача: в архиве обнаружены два блокнота Милликена с первичными записями экспериментов, послуживших основанием для работы [6]. В этой работе, в частности, написано черным по белому, что в итоговой таблице XX представлены результаты измерений, проделанных над 58 каплями в течение 60 последовательных дней, без какого-либо их отбора. Однако Холтон увидел, что первичные данные по измерениям для каждой отдельной капли записываются и частично обрабатываются на одной странице блокнота, а всего в двух блокнотах имеется 140 заполненных страниц. Иными словами, всего изучалось не 58, а примерно 140 капель («примерно» по той причине, что некоторые опыты обрывались слишком рано и потому ни на что не годились). Выходит, что Милликен утаил большую часть экспериментальных результатов. Впрочем, можно считать, что хронологически первый блокнот (содержащий 75 страниц) учитывать не надо, поскольку Милликен еще только осваивал методику. Второй блокнот (за время с 13 марта по 16 апреля 1912 г.) содержит 65 листов с записями, т.е. и при таком расчете Милликен кое что утаил.

Для примера Холтон приводит в своей книге [8] копии двух страниц второго блокнота Милликена – это два последовательных опыта над двумя каплями в один день 15 марта 1912 г. Первичные измерения времени падения и подъема капли на них разобрать можно, но с арифметическими вычислениями дело обстоит хуже. В целом речь идет о сложении и вычитании чисел столбиком и о применении логарифмов для умножения, деления и извлечении корня. Вид страницы напоминает тетрадь по арифметике неаккуратного школьника, с той только разницей (в худшую сторону), что у школьника тетрадь была бы разлинована в клетку, а у Милликена альбом не разлинован. Логарифмы (насколько можно разобрать) четырехзначные, чего для окончательной точности 0.1% недостаточно.

В связи с этим мы сделали небольшой экскурс в историю вычислительной техники, чтобы установить, когда стал широко доступным арифмометр "Феликс", который позволяет производить вычисления практически с любым желательным числом знаков. Оказалось, что название "Феликс" этот арифмометр получил при возобновлении его производства в Советском Союзе в честь Ф.Э. Дзержинского. А вообще-то это арифмометр Однера. В.Т.Однер, швед по национальности, работал в России. Начиная с 1890 года, ему удалось организовать серийное производство своих арифмометров в России, а с 1891 года также и в Германии под названием "Брунсвига". Арифмометры Однера были широко известны, в частности, этот арифмометр получил высший приз Всемирной выставки в Чикаго в 1893 году. В начале XX века цены были следующие. "Брунсвига" стоила 300 марок (150 руб.), а более простые модели от 75 до 125 руб. Вот и возникает вопрос - могла ли Райерсоновская лаборатория, в которой работал Милликен, выложить такую сумму за арифмометр?

После частичной обработки наблюдений Милликен «наложил резолюцию», которую можно видеть в левом нижнем углу страницы. Она следующая: “*Beauty. Publish this surely, beautiful!*” Действительно, данные по этой капле (получившей номер 41) вошли в работу [6] в качестве таблицы XV. Холтон приводит и эту таблицу, но, надо сказать, трактует некоторые детали не вполне правильно. Например, в заголовках двух столбцов таблицы есть обозначения t_F и $1/t_F$. Первый столбец – это наблюденные по хроноскопу значения времени подъема. Казалось бы, в силу обозначений, во втором столбце должны стоять обратные величины к элементам первого столбца. Однако в тексте статьи [6] сказано, что при вычислении элементов второго столбца нужно учесть поправку хроноскопа (см. выше п.3). Если же подряд стоят несколько значений времени подъема капли с одним и тем же зарядом, нужно их усреднить, поправить среднее и взять обратную величину (хотя это и не сказано явно в тексте, но, по-видимому, Милликен делал именно так). Обозначения Милликена ведут к недоразумению, чего не отметил Холтон. Точно так же t_g - это наблюденное по хроноскопу время падения, а $1/t_g$ - это единица, деленная на *поправленное среднее* время падения (среднее по всем наблюдениям над данной каплей).

Объяснения Холтона к остальным столбцам таблицы XV заставляют предположить, что он не полностью понял принцип расчетов Милликена. Так, из его пояснений к четвертому столбцу, озаглавленному n' (это изменение числа элементарных зарядов при двух соседних по времени подъемах капли) невозможно понять, что сначала следует с определенным приближением найти *«наибольший общий делитель»* разностей вида $(1/t'_F - 1/t_F)$, а затем получать n' путем деления указанных разностей на этот «делитель» [5] (подробнее об этом см. в следующем пункте 6).

Ну и совсем нехорошо его утверждение, что в шестом столбце *n* обозначает заряд, полученный каплей за счет трения при распылении масла. Тогда как на самом деле, это суммарный заряд, полученный при распылении масла и при поглощении каплей ионов воздуха. Кстати, Холтон не поправил существенной опечатки: в начале столбца «*n»* значение «8» невозможно - должно быть «7». В конце же этого столбца (на пустом месте) должно стоять «8».

Теперь обратимся к тому, что Холтон обнаружил на второй странице блокнота Милликена от 15.03.1912. Оказывается, через 13 минут после окончания опыта над первой каплей Милликен начал эксперимент с другой каплей. Существуют два способа оценки

[5] Например, в таблице XV есть три случая, когда n'=1, и в качестве «общего делителя» надо просто взять любую из этих разностей.

множителя, пропорционального заряду электрона: на основании разностей в числе элементарных зарядов n' при нескольких парах соседних подъемов капли и на основании суммарного числа зарядов n. С первой каплей получилось хорошо: эти два способа привели к результатам, отличающимся чуть больше, чем на 0.1%. А со второй каплей различие получилось около 1%. Холтон считает, что именно на этом основании Милликен забраковал опыт со второй каплей - соответствующая «резолюция» гласит: «*Error high, will not use*». Вот пример выброшенного опыта. Как же этот факт трактует Холтон?

По мнению Холтона, основной причиной выбрасывания этого опыта был страх Милликена перед ужасным Эренхафтом. Последний мог бы сказать (по мнению Холтона) следующее. «По Вашему мнению число зарядов n принимало значения 11, 13 и 14. Но если допустить, что на самом деле оно принимало дробные значения 10.9, 12.9 и 13.9 и делить получаемые Вами величины на эти чуть меньшие числа, то оба метода оценки заряда электрона превосходно согласуются. Следовательно, Ваши наблюдения доказывают, что существует субэлектрон, заряд которого составляет 1/10 Вашего элементарного заряда».

С подачи Холтона страх Милликена перед Эренхафтом, ради которого (якобы) Милликен цензурировал свои опыты, сделался частью представлений о Милликене в общественном мнении. Например, этот страх подается как факт в книге Криза [1].

Но вот другое мнение. Д. Гудстейн (Goodstein D.) в статье [9] выражает тот взгляд на вещи, что вопрос о существовании субэлектронов не имел никакого значения для Милликена (поскольку тот был вполне уверен в том, что их нет). Милликен не включил в публикацию часть экспериментов просто потому, что нашел во время экспериментирования, что они недостаточно хорошо получились, а никакой попытки сокрытия части результатов от ужасного Эренхафта вообще не было.

Получается, что два историка науки – Холтон и Гудстейн – пришли к различным выводам при анализе одних и тех же фактов. Важность «тематического» подхода (по Холтону) вновь продемонстрирована: выводы историков зависят от априорных предпосылок.

Правда, Гудстейн в своей «защите Милликена» несколько перестарался. Он утверждает, что окончательно полученный Милликеном доверительный интервал для элементарного заряда содержит современное значение заряда электрона. Речь идет об интервале для e следующего вида: $4.774\times10^{-10} \pm 0.009\times10^{-10}$, который, очевидно, не содержит современного значения e=4.80320×10^{-10}. Кроме того, как получена эта оценка точности 0.009×10^{-10}? Милликен правильно не доверяет стандартному в математической статистике методу вычисления доверительных интервалов. Однако он рассуждает следующим образом. Имеются четыре основных фактора, которые могут внести в наблюдения систематическую ошибку: вязкость воздуха, расстояние между пластинами конденсатора, ошибка вольтметра и ошибка в измерении расстояния d, проходимого каплей. С грехом пополам Милликен оценивает ошибку, вносимую каждым фактором, не более как 0.1%. (Мы сейчас знаем, что для вязкости воздуха это неверно.) Затем предлагается взять корень квадратный из суммы квадратов этих оценок. Получается, естественно, 0.2%. Число 0.009×10^{-10} и есть 0.2% от 4.774×10^{-10} (если не совсем правильно округлить в меньшую сторону).

Иными словами, за этим расчетом стоит совершенно невозможная логика. Сначала как-то оцениваются систематические ошибки. Потом эти ошибки объявляются случайными со стандартным уклонением, равным их оценкам. Дисперсия суммы ошибок вычисляется как сумма дисперсий, из нее извлекается корень и полученная стандартная ошибка опять превращается в максимально возможное значение суммарной ошибки. Защищать такой «метод» построения доверительных интервалов невозможно даже в том случае, если бы полученный интервал содержал современное значение.

Есть еще обстоятельство, связанное с отбором материала для публикации [6]. Самое большое значение величины $1/pa$, которое есть в таблице XX, равно 620.2 (чтобы его получить, надо поправить опечатку в значении p = 9.070: должно быть 9.70). Но на Fig. 3

(из работы [6]) показаны еще две точки с гораздо большими абсциссами. Значит, Милликен использовал не только данные, включенные в таблицу XX. Иными словами, Милликен несколько колебался при выборе материала для публикации, чего и естественно ожидать.

Нам кажется, что решая вопрос о том, включить или выбросить результат данного опыта, Милликен если и думал об Эренхафте, то в самую последнюю очередь. Дело в том, что любая таблица первичных данных может дать возможность для трактовки Эренхафта, гипотетически описанной у Холтона. А Милликен опубликовал 16 таких таблиц.

Далее, вместе с указанием на то, что в публикацию включены (якобы) все экспериментальные результаты, Милликен замечает, что аппарат за это время разбирался и собирался несколько раз. Эти две вещи (включение всех результатов и неоднократная разборка и сборка аппарата) логически несовместимы.

Напомним, что сосуд, содержавший конденсатор, был погружен в бак, залитый сорока литрами машинного масла. При разборке аппарата надо было слить это масло и удалить обтиранием ветошью его остатки.[6] После освобождения от масла - разъединить довольно много коммуникаций, поскольку упоминается о полной разборке аппарата. Например, в предыдущей работе [5] сказано, что для уменьшения испарения масляных капель нужно было смазать тонким слоем масла обращенные друг к другу плоскости пластин конденсатора – это можно сделать не иначе, как с полной разборкой. В работе [6] об этом ничего не сказано, но по фактическим данным этой работы получается, что хотя чаще бывали случаи, когда масляные капли уменьшались в размерах с течением времени, но есть и ряд случаев бесспорного роста капель. (Видимо, и в этой работе применялся насыщенный масляный пар, который мог конденсироваться на каплях).

Решиться на разборку аппарата можно было только в том случае, когда он начинал давать подозрительные результаты. Но тогда естественно эти результаты должны были быть отброшены.

Для нас интересно проследить, каким образом переменные свойства аппарата Милликена выявляются при статистической обработке. В этом и состоит, по нашему мнению, основная польза от применения математической статистики.

6. Описание первичных данных, опубликованных Милликеном в [6]

Работа с данными Милликена статистическими методами возможна лишь благодаря тому, что он частично опубликовал данные первичных измерений: это таблицы IV - XIX работы [6]. Каждая из этих 16 таблиц относится к ряду измерений времени падения и подъема для единственной капли. Из 58 капель, которые есть в таблице XX, первичные измерения приведены для 16 капель. Однако и на том спасибо. Если бы Милликен вообще ограничился приведением только таблицы XX, то единственное, что можно было бы сказать - что эта таблица содержит явные арифметические ошибки.

Приведем теперь пример таблицы первичных данных Милликена. Это таблица V из работы [6].

[6] Если уж Милликена не снабдили ни арифмометром, ни даже бумагой в клетку, то, может быть, хоть ветоши дали в избытке?

Table V.

Drop No. 16.

t_g	t_F	$\frac{1}{t_F}$	n'	$\frac{1}{n'}\left(\frac{1}{t'_F}-\frac{1}{t_F}\right)$	n	$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{t_g}+\frac{1}{t_F}\right)$	
18.638							
18.686							
18.689	17.756	.05628			16	.006853	
18.730	17.778		5	.006908			$V_i=5106$
18.686	45.978	.02174					$V_f=5100$
18.726	45.870				11	.006832	$t=23.7°$ C.
18.772	45.716	.021826			8	.006851	$p=74.68$
18.740	45.758		3	.006795			$v_1=.05449$
18.724	694.0	.001441					$a=.0002188$
18.720	27.95	.03574	5	.006860	13	.006855	$l/a=.04390$
18.816	118.388	.008439	4	.006825	9	.006868	$\mathbf{e_1=5.065}$
18.816	45.030	.02217	2	.006866	11	.006867	
18.716	34.564	.02890			12	.006856	
18.804	44.826	.02227			11	.006876	
18.746	117.198	.008518	2	.006876	9	.006876	
18.746	44.784	.022295	2	.006889	11	.006879	
18.790							
18.738				**.006860**		**.006861**	

Эта таблица нуждается в пояснениях. В первом столбце t_g таблицы стоят значения времени падения капли в том виде, в каком они считаны с хроноскопа, т.е. без внесения поправок, описанных в п.4. После первого падения за время 18.638 сек, конечно, должен был последовать подъем, но время подъема по каким-то причинам измерить не удалось, так что во втором столбце t_F первое значение отсутствует. То же самое относится к времени подъема после второго падения за время 18.686 сек. Только после третьего падения указано и время подъема 17.756 сек (также без поправки). Квадратная скобка при первых двух числах из столбца t_F означает, что эти значения усредняются. В третьем столбце $\dfrac{1}{t_F}$ стоит единица, деленная на это среднее (все выписанные десятичные знаки на этот раз верны). Но следовало бы (в соответствии с текстом статьи [6]) учесть среднее время *с поправкой хроноскопа.* Тогда на этом месте получится 0.05627. Для следующей пары чисел, отмеченных квадратной скобкой (это 45.978 и 45.870) поправка хроноскопа учтена, так что в третьем столбце стоит верное значение 0.02174. Обратимся теперь к шестому столбцу с заголовком *n.* Это число элементарных зарядов, которые имела капля при ее подъемах. В этом столбце имеется опечатка. Проведенная нами проверка и пересчет табличных значений показали, что значение n=8 ошибочно напечатано против значений времени подъема около 45.7 сек (которые на самом деле соответствуют 11 зарядам), а должно быть против 694.0 сек. То есть, на место 8 в столбце n нужно поставить 11, а 8 перенести на позицию ниже.

Теперь перейдем к четвертому столбцу n'. В нем стоит разность между числами зарядов капли при её подъемах, отмеченных фигурной скобкой. Эти разности невелики, а потому определяются надежно по следующей причине.

В пятом столбце, озаглавленном $\dfrac{1}{n'}(\dfrac{1}{t'_F}-\dfrac{1}{t_F})$ стоят величины, непосредственно нужные для вычисления величины e_1, т.е. заряда электрона без учета поправки к закону Стокса. Действительно, из формулы (4) получается, что величина ne_1 дается выражением

$$ne_1 = 9\sqrt{2}\pi\frac{1}{F}(g(\sigma-\rho))^{-1/2}\eta^{3/2}v_1^{1/2}(v_1+v_2).$$

Пусть два таких выражения относятся к одной и той же капле, но имеющей в разное время разные количества зарядов n и $n+n'$. Тогда разность $n'e_1$ будет пропорциональна разности v'_2 - v_2 скоростей подъема[7]. Разность же скоростей получается умножением разности $(\frac{1}{t'_F}-\frac{1}{t_F})$ на путь подъема d = 1.021 см.

Поскольку n' невелико, то отклонение на единицу от его правильного значения приведет к тому, что соответствующая оценка для e_1 изменится на десятки процентов, в то время как речь идет об уточнении известных значений e (и, соответственно, e_1) на доли процента.

Когда исследование только начинается, и каких-либо оценок для e и e_1 нет, то поступаем (вслед за Милликеном) следующим образом. Составляем несколько величин $(\frac{1}{t'_F}-\frac{1}{t_F})$, которые, как обсуждалось выше, пропорциональны n'. Их должно быть достаточно много, чтобы можно было надеяться на то, что наибольший общий делитель соответствующих чисел n' равен единице. Выбираем из этих чисел наименьшее и пробуем, делятся ли на него нацело (с достаточной точностью) остальные числа. Если делятся, то соответствующее $n'=1$, а остальные получаются делением соответствующих разностей на наименьшую. Если не делятся, то пробуем таким же образом половину, треть и т.д. от наименьшего числа. Числа n получаются делением сумм $(\frac{1}{t_g}+\frac{1}{t_F})$ на найденную выше наибольшую общую меру разностей $(\frac{1}{t'_F}-\frac{1}{t_F})$.

Наконец, в последнем (седьмом) столбце таблицы V даны величины, непосредственно (после умножения на d) подставляемые в формулу (4). Необходимо помнить только, что величина t_g в заголовке этого столбца понимается как *среднее значение* времени падения (т.е. среднее по первому столбцу) с учетом поправки хроноскопа.[8]

Двум способам вычисления e_1 (по пятому столбцу таблицы – по величине $n'e_1$; и по седьмому столбцу - по величине ne_1) Милликен придает существенное значение, поскольку в пятом столбце используется лишь время подъема, а в седьмом основную роль играет время падения, которое обычно существенно меньше, чем время подъема. Получаются почти независимые способы определения заряда электрона, которые дают близкие результаты. Однако, в конце концов Милликен отдает предпочтение данным седьмого столбца, в котором нет потери точности из-за вычитания довольно близких чисел.

Наконец, величины, стоящие в правой части таблицы, означают следующее:

V_i и V_f - напряжение батареи в начале и конце эксперимента; t - температура установки; p - давление воздуха в пространстве между пластинами, см рт.ст.; v_1 - средняя скорость падения капли, см/сек; a - радиус капли, см; l - средняя длина свободного пробега молекул воздуха (нужная для вычисления поправочного множителя $(1+A\frac{l}{a})$); e_1 - оценка заряда электрона без учета поправки к закону Стокса.

[7] С известным множителем пропорциональности, поскольку скорость падения капли v_1 не зависит от числа зарядов.

[8] Впрочем, в случае данной таблицы V значение v_1 = 0.05449 получено без учета поправки хроноскопа.

Напомним, что оценка для заряда электрона e вычисляется по формуле (5). В данном случае получаем $e = 4.7869\times10^{-10}$ эл.стат. единиц. Это значение соответствует вязкости воздуха 1825×10^{-7} пз. Если это значение пересчитать на вязкость 1833×10^{-7}, то получим $e = 4.8184\times10^{-10}$, что значительно (т.е. на 0.3%) больше принятого сейчас значения.

7. Обращение постановки задачи: определение вязкости воздуха по известному заряду электрона

Милликен в работе [5] (стр. 387) высказывает предположение, что в ближайшие годы можно с доверием ожидать *(it may be confidently expected*) таких определений вязкости воздуха, которые будут точны в пределах одной-двух десятых процента. Этого, однако, не произошло. В современных справочниках можно найти различные значения вязкости воздуха. Например, статья [7] суммирует результаты различных определений этой величины в широком диапазоне температур и давлений. Наименее расходятся результаты в области обычной комнатной температуры и нормального давления, но и там различные определения отличаются на 1% и более (см. [7], Fig. 3). В связи с этим представляется не лишенным интереса использовать данные Милликена и известное в настоящее время значение заряда электрона для определения того значения вязкости воздуха, которое если и не является на самом деле точным, то все же лучше всего согласуется с данными Милликена. И в некоторых дальнейших рассуждениях оно используется на правах точного значения.

Каждая таблица первичных данных в работе [6] содержит результаты измерений, выполненных над одной и той же каплей масла. Отдельное измерение дает три числа: время падения капли t_g, время подъема капли под действием электрического поля t_F и число n элементарных зарядов, которое имела капля во время ее подъема. Разность потенциалов V электрического поля между пластинами указывается (в вольтах) для начала и конца эксперимента. В начале она несколько больше, чем в конце. Для достижения лучшей точности мы вычисляем V для каждого отдельного измерения, линейно интерполируя падение напряжения во времени. Однако (поскольку точное время проведения отдельного измерения не указывается), мы используем время, которое условно называем "активным". Это суммарное время тех подъемов и падений капли, которые предшествуют данному измерению, плюс время подъема и падения в данном измерении.[9]

Поскольку расчеты происходят в электростатической системе СГС, разность потенциалов V в вольтах должна быть переведена в статвольты (1 статвольт = 299.792 вольта) и в напряженность поля F между пластинами - путем последующего деления на расстояние между пластинами h=1.6 см. Современное значение заряда электрона $e=4.803204\times10^{-10}$ эл.-стат. единицы. Вязкость в системе СГС измеряется в единицах, называемых пуазами (пз). Размерность этой единицы $г\times см^{-1}\times сек^{-1}$. Считается, что вязкость воздуха не зависит от давления (во всяком случае, в пределах диапазона давлений, использованного в опытах Милликена), но заметно возрастает с ростом температуры. Справочник [4] дает значение вязкости воздуха при 20^0С $\eta_{20}=1819\times10^{-7}$. Пересчет по формуле Сазерленда ([4], стр. 178, 181) дает для 23^0С $\eta_{23}=1833.4\times10^{-7}$. Вместо последнего значения Милликен использовал 1825×10^{-7}, которое затем заменил на 1824×10^{-7}.

Из данных Милликена вязкость определяется следующим образом. Сначала определяется по формулам (8) и (9) вес P и радиус a капли (независимо от вязкости, но при подстановке современного значения заряда электрона), а затем для определения вязкости остается любая из формул (2) или (3), только правые части этих формул надо умножить на поправку Милликена к закону Стокса, т.е. на множитель $(1+\frac{b}{pa})$. Если a определять

[9] Например, под активным временем первого измерения понимается сумма времен падения и подъема в этом первом измерении. В одном случае (таблица IV из [6]) указано также полное время проведения опыта. Общее активное время составляет в этом случае примерно 2/3 от полного времени проведения эксперимента.

указанным образом, то формулы (2) и (3) дают в точности совпадающие результаты для вязкости. (Скорости v_1 и v_2, входящие в эти формулы, равны результату деления постоянного отрезка d=1.021 см на время, соответственно, падения и подъема. Эти значения времени должны быть поправлены в соответствии с п.3.)

Таблицы Милликена подготовлены небрежно: они содержат ошибки и частично нуждаются в редактировании. Список сделанных нами изменений таблиц оригинала выносится в отдельное приложение.

Окончательный результат расчетов представлен таблицей 2. В этой таблице требуют пояснения два столбца: "эмпирическая дисперсия" и "нормированный вес наблюдения". Под эмпирической дисперсией понимается обычная оценка s^2 дисперсии значений вязкости воздуха по наблюдениям над одной и той же каплей. Вес наблюдения для i-ой капли принимается равным отношению $w_i = k_i / s_i^2$, где k_i - число наблюдений для этой капли. Нетрудно проверить, что дисперсия взвешенного среднего равна $1/(\sum w_i)$, если, конечно, определение теоретической дисперсии по выборочной предположить точным. Нормированным весом наблюдения мы называем его вес, деленный на сумму всех весов.

Таблица 2. Определение вязкости воздуха по данным Милликена

№ таблицы	№ капли	число наблюдений (k_i)	температура (град. C)	давление (см рт.ст.)	вязкость при 23° C ×10^7	эмпирическая дисперсия ×10^{13}	нормированный вес наблюдения
4	6	21	22.82	75.62	1832.67	2.5541	0.07662
5	16	14	23.70	74.68	1831.51	1.1674	0.11176
6	14	18	23.09	75.28	1829.58	2.4992	0.06712
7	13	14	23.00	76.06	1835.01	1.6481	0.07916
8	15	19	23.83	75.24	1836.79	3.1374	0.05643
9	17	8	23.06	73.47	1831.47	0.5632	0.13237
10	42	13	22.94	15.72	1829.68	4.2562	0.02846
11	46	19	22.81	14.68	1828.02	2.4952	0.07096
12	53	9	23.16	12.61	1832.45	2.2888	0.03664
13	48	9	22.81	15.35	1828.11	1.3316	0.06299
14	47	18	22.83	9.70	1832.75	2.7330	0.06138
15	41	11	23.05	19.01	1841.18	0.8256	0.12415
16	1	21	23.00	75.80	1842.69	11.0408	0.01772
17	56	20	23.21	4.46	1822.85	22.9408	0.00812
18	22	8	23.22	76.42	1837.36	1.4555	0.05122
19	52	7	22.98	16.95	1826.80	4.3818	0.01489

взвешенное среднее 1833.19×10^{-7}

Если вычислить по обычным правилам стандартную ошибку взвешенного среднего, то получается 0.31×10^{-7}. Это означает неплохое согласие с данными [4] (расхождение почти в пределах стандартной ошибки взвешенного среднего).

Однако подобные вычисления стандартных ошибок обоснованы в том случае, если различные серии определений интересующей величины обладают статистической однородностью. В нашем случае одна серия определений вязкости соответствует опытам, проводимым над одной и той же каплей масла. Проверку статистической однородности можно сделать наглядной, изобразив на одном чертеже эмпирические функции распределения значений вязкости (приведенных к температуре 23^0C), отвечающие различным каплям. Результат - на рис. 2.

Замечание. Более удобно изображать не сами ступенчатые эмпирические функции, а середины их скачков, соединенные отрезками прямых. По оси ординат использован нормальный масштаб.

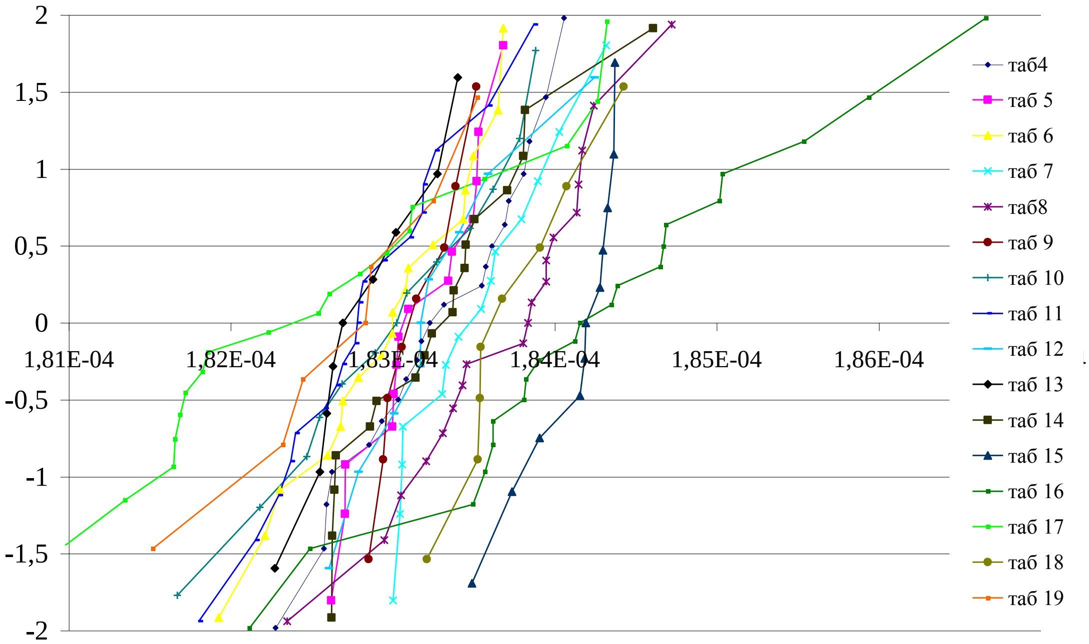

Рис. 2. Эмпирические функции оценок вязкости воздуха по данным опытов Милликена при известном заряде электрона

При рассмотрении рис. 2 создается впечатление, что различные (т.е. отвечающие различным каплям) оценки вязкости воздуха отличаются систематическими сдвигами. Поскольку число наблюдений над каждой каплей невелико, это впечатление желательно подтвердить каким-либо статистическим критерием. Когда речь идет о двух выборках, то проверка гипотезы о совпадении их теоретических распределений производится, в частности, с помощью критерия Колмогорова-Смирнова. Статистикой критерия в этом случае является максимальное расстояние между эмпирическими функциями распределения. Составлены соответствующие таблицы для распределения вероятностей этой статистики. В случае же многих функций распределения составление таблиц невозможно (поскольку входами в такие таблицы были бы численности конкретных выборок, т.е. получалась бы таблица с неразумно большим числом входов). Но аналогом критериальной статистики может быть наибольшее из расстояний между всеми возможными парами эмпирических функций распределения. Распределение же этой статистики (при нулевой гипотезе статистической однородности) может быть подсчитано методом Монте-Карло для рассматриваемых объемов выборок. Очевидно, критерий получается непараметрический, так что моделирование методом Монте-Карло может исходить из любого (непрерывного) распределения. В данном случае эта статистика равна единице. С помощью метода Монте-Карло устанавливается, что (при данных численностях выборок) единица - крайне маловероятное значение. Таким образом, гипотеза статистической однородности (а с ней и обычная практика оценки точности с помощью стандартных отклонений и доверительных интервалов) не является надежной. (Да и разброс оценок вязкости по различным каплям в таблице 2 слишком велик, чтобы можно было серьезно утверждать, что среднее взвешенное имеет ошибку порядка 0.31×10^{-7}.)

Можно предположить, что значение вязкости воздуха при 23^0С равное 1833×10^{-7} не то, чтобы является точным, но наиболее согласуется с данными Милликена. Пересчитаем окончательное значение e=4.774×10^{-10}, даваемое Милликеном, на новое значение вязкости. Указанное значение e отвечает вязкости, равной 1824×10^{-7}. Результат пересчета равен $4.774\times10^{-10}\times(1833/1824)^{1.5} = 4.8094\times10^{-10}$. Это больше, чем современное значение на 0.0062×10^{-10}, т.е. почти на 0.13%. Получается, что после устранения систематической ошибки, связанной с использованием заниженного значения вязкости, результат Милликена все-таки не укладывается в сакраментальную точность 0.1%.

Что же касается доверительного интервала, то Милликен пользуется близким понятием "вероятной ошибки". Она составляет $0.68\approx2/3$ от стандартной ошибки среднего из наблюдений. Милликен вычислил, что вероятная ошибка составляет 1/3000 от полученного среднего значения. Понятно, что доверительный интервал плюс/минус три вероятных ошибки (т.е. плюс/минус две стандартных ошибки среднего) достоин уважения. Но он составляет плюс/минус 1/1000 т.е. 0.1%, а ошибка 0.13% не помещается в доверительный интервал.

Однако имеются основания думать, что такая неудача связана лишь с арифметическими ошибками, которые сделал Милликен при обработке своих наблюдений.

8. Пересчет данных Милликена о заряде электрона

В этом пункте мы описываем попытку сделать наилучшую возможную обработку первичных данных Милликена, исходя из того значения вязкости $\eta_{23} = 1825\times10^{-7}$, которое принимал Милликен при составлении итоговой таблицы XX работы [6]. Как уже упоминалось в п.7, мы частично отредактировали таблицы первичных данных, т.е. таблицы IV - XIX работы [6]. Милликен применяет, где только возможно, усреднение исходных измерений. Например, усредняются все значения времени падения капли, а также те значения времени подъема, которые соответствуют одному и тому же суммарному заряду капли. Между тем, в течение одного опыта капля несколько меняется в размерах. Это изменение возможно уточнить, вычислив линейную регрессию радиуса капли на "активное" время (см. п. 7). Так же, как и в п.7, следует учесть изменение во времени напряженности F электрического поля между пластинами. Кроме того, риск арифметических ошибок существенно снижается при использовании компьютера.

Итак, каждое первичное наблюдение приносит тройку чисел $\{t_g, t_F, n\}$ - время падения капли, время подъема и количество элементарных зарядов во время подъема. По этим данным вычисляется значение e_1 и значение радиуса капли *a в этом наблюдении*.

Для вычисления радиуса капли берем приближенное значение заряда электрона 4.78×10^{-10}, которое использовал Милликен. Затем значения *a,* полученные в опытах над одной каплей, сглаживаем линейной функцией активного времени и окончательно в качестве значения радиуса капли *a* берем "сглаженное" значение, т.е. точку, лежащую на линии регрессии значений радиуса капли в отдельных наблюдениях на активное время. Для перевода значения e_1 в значение элементарного заряда e применяем поправочный множитель $(1+\frac{b}{pa})^{-3/2}$, в котором b= 0.0006254 (как указано Милликеном), а в качестве a подставляем «сглаженное» значение.

Для примера мы приводим графики зависимости радиуса капли от номера измерения (рис.3) и от активного времени (рис.4) по данным таблицы IV. Из этих рисунков видно, что линейное приближение для радиуса капли более удачно в случае использования активного времени в качестве независимой переменной регрессии.

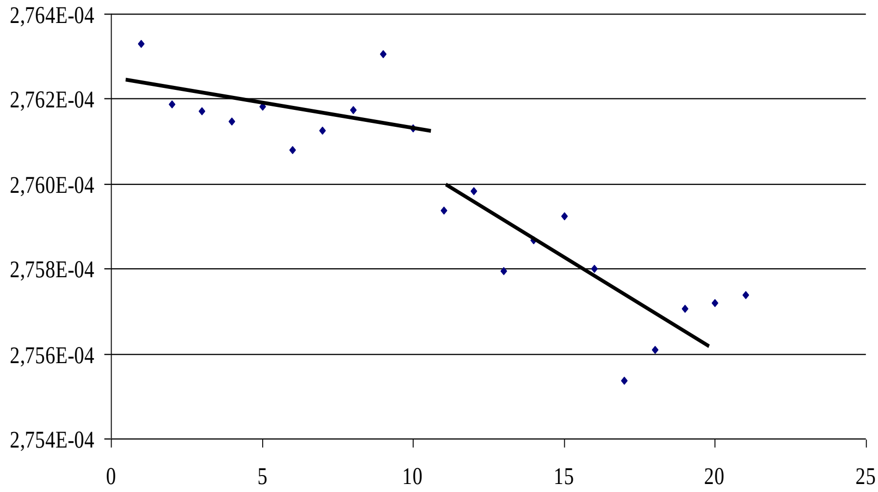

Рис.3.Динамика радиуса капли (в см) в зависимости от номера измерения

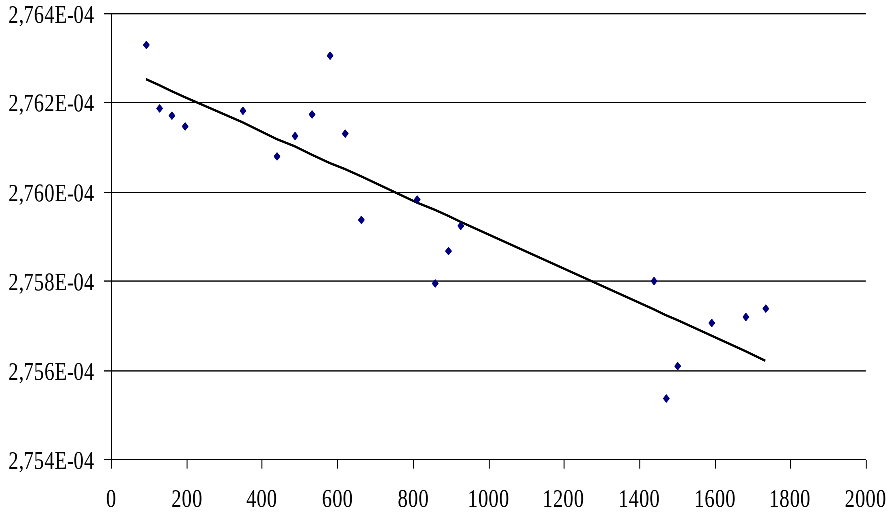

Рис.4. Динамика радиуса капли (в см) в активном времени (в сек)

Таким образом, относительное изменение радиуса капли в течение опыта (по сглаженным данным) составляет около 6/2763 =0.2%. Для времени падения такое изменение составит 0.4%. Эту величину стоит учитывать, если поставить целью определение заряда электрона с точностью до 0.1%.

Результаты вычислений заряда электрона по первичным данным Милликена с учетом сделанных замечаний, сведены в таблицы 3 и 4. Первая из этих таблиц содержит результаты, полученные для капель с номерами, не превосходящими 23. Этим каплям соответствуют небольшие значения величины $\frac{b}{pa}$ (входящей в поправочный множитель) - порядка единиц процентов.[10] Таким образом, возможная ошибка при эмпирическом определении значения b не оказывает заметного влияния на расчет e (для этих капель). По этой причине Милликен для определения значения e воспользовался данными первых 23 капель. В таблице 4 показаны, результаты для капель с большими значениями величины $\frac{b}{pa}$ (десятки процентов). В этом случае неточность значения b (если она имеется) могла бы оказать

[10] В таблицах 3 и 4 показано среднее значение этого множителя: он немного меняется при различных измерениях на одной капле, потому что радиус капли a не остается постоянным.

существенное влияние на оценку значения *e*. Но на самом деле этого не произошло. Взвешенные средние значения *e* в таблицах 3 и 4 оказались близкими, равно как и оценки их стандартных отклонений и коэффициентов вариации. Таким образом, поправочный множитель Милликена к закону Стокса, по-видимому, не вносит систематической ошибки. Более того, при пересчете на вязкость η_{23} = 1833×10^{-7} значения *e* оказываются близкими к современному значению (4.8032×10^{-10}): отклонения от современной величины в пределах примерно одного среднеквадратичного отклонения (равного 0.0016×10^{-10} в таблице 3 и 0.0019×10^{-10} в таблице 4). Таким образом, желаемая точность в 0.1% = 0.0048×10^{-10} достигнута с большим запасом. Если современного значения *e* не знать, то ошибку разумно оценивать удвоенным стандартным отклонением (а относительную ошибку - удвоенным коэффициентом вариации). И даже эти оценки укладываются в точность 0.1%. Если данные таблиц 3 и 4 рассматривать вместе, то получается объединенный результат, приведенный в таблице 5.

Таблица 3. Оценка заряда электрона по данным Милликена (выборка из первых 23 капель)

№ таблицы	№ капли	Число наблюдений	Поправочный множитель. среднее значение	Средний заряд *e* ($\times10^{10}$)	Дисперсия значения заряда ($\times10^{24}$)	Вес среднего значения заряда ($\times10^{-24}$)	Нормированный вес среднего значения заряда
4	6	21	1.029968	4.77279	4.45476	4.7141	0.1248979
5	16	14	1.038244	4.77729	1.68531	8.3071	0.2200938
6	14	18	1.037981	4.78494	4.02187	4.4755	0.1185779
7	13	14	1.037493	4.76359	2.70732	5.1712	0.1370088
8	15	19	1.038051	4.75719	5.65685	3.3588	0.0889895
9	17	8	1.038551	4.77736	1.10569	7.2353	0.1916967
16	1	21	1.017914	4.73428	18.2112	1.1531	0.0305521
18	22	8	1.055419	4.75427	2.40360	3.3283	0.0881834
Σ		123				37.743	1

Взвешенное среднее заряда *e*	Дисперсия взвешенного среднего	Стандартное отклонение	Коэффициент вариации	Значение *e*, приведенное к вязкости $1833\cdot10^{-7}$
$4.77064\cdot10^{-10}$	$2.64947\cdot10^{-26}$	$1.62772\cdot10^{-13}$	0.000341	$4.80204\cdot10^{-10}$

Таблица 4. Оценка заряда электрона по данным Милликена (выборка из остальных 35 капель)

№ таблицы	№ капли	Число наблюдений	Поправочный множитель	Средний заряд *e* ($\times10^{10}$)	Дисперсия значения заряда ($\times10^{24}$)	Вес среднего значения заряда ($\times10^{-24}$)	Нормированный вес среднего значения заряда
10	42	13	1.193072	4.78303	7.0017	1.8567	0.0664774
11	46	19	1.251959	4.78900	3.1617	6.0094	0.2151637
12	53	9	1.344339	4.77107	4.0725	2.2099	0.0791257
13	48	9	1.271341	4.78848	1.9338	4.6540	0.1666327
14	47	18	1.270407	4.77039	4.6312	3.8867	0.1391601

15	41	11	1.181273	4.73831	1.3957	7.8813	0.2821860
17	56	20	1.385004	4.81001	39.570	0.5054	0.0180966
19	52	7	1.311595	4.79341	7.5587	0.9261	0.0331577
Σ		106				27.930	1

Взвешенное среднее заряда *e*	Дисперсия взвешенного среднего	Стандартное отклонение	Коэффициент вариации	Значение *e*, приведенное к вязкости 1833×10^{-7}
$4.77073\cdot10^{-10}$	$3.58040\cdot10^{-26}$	$1.89220\cdot10^{-13}$	0.000397	$4.80213\cdot10^{-10}$

Таблица 5. Объединенные результаты таблиц 3 и 4.

Взвешенное среднее заряда *e*	Дисперсия взвешенного среднего	Стандартное отклонение	Коэффициент вариации	Значение *e*, приведенное к вязкости 1833×10^{-7}
$4.7707\cdot10^{-10}$	$1.5227\cdot10^{-26}$	$1.2340\cdot10^{-13}$	0.000259	$4.80208\cdot10^{-10}$

Таким образом, при использовании лишь шестнадцати первичных экспериментов из общего числа 58 и введении исправленного значения вязкости возникает полная видимость статистического благополучия. Сопоставим теперь оценки *e*, которые дает Милликен, с нашими (по 16 каплям, для которых опубликованы первичные результаты). Оценки Милликена, отвечающие вязкости 1825×10^{-7}, получаются путем возведения в степень 3/2 чисел последнего столбца таблицы XX [6].

Таблица 6. Сравнение оценок заряда электрона по одним и тем же исходным данным согласно таблицам IV - XX из [6] (в единицах 10^{-10} СГСЭ)

№ капли	Оценка Милликена	Наша оценка	Разность оценок
1	4.7807	4.7343	0.0464
6	4.7748	4.7728	0.0020
13	4.7713	4.7636	0.0077
14	4.7889	4.7849	0.0040
15	4.7725	4.7572	0.0153
16	4.7889	4.7773	0.0116
17	4.7643	4.7774	-0.0131
22	4.7654	4.7543	0.0111
41	4.7607	4.7383	0.0224
42	4.7924	4.7830	0.0094
46	4.7994	4.7890	0.0104
47	4.7795	4.7704	0.0091
48	4.7971	4.7885	0.0086
52	4.8065	4.7934	0.0131
53	4.7795	4.7711	0.0084
56	4.7771	4.8100	-0.0329
среднее	*4.7812*	*4.7728*	*0.0084*
приведенное к 1833×10^{-7}	4.8127	4.8043	

Каким-то образом оказалось, что оценки Милликена систематически больше наших. В строке "среднее" приведено среднее значение 16 оценок без учета весов. После приведения к вязкости 1833×10^{-7} получается, что среднее из оценок Милликена больше современного значения e почти на 0.2%, а среднее из наших оценок - только на 0.02%. Но видимое статистическое благополучие разваливается при проверке статистической однородности.

Вопрос состоит в том, можно ли считать одинаковым распределение вероятностей оценок заряда электрона при экспериментах с разными каплями. На рис. 5 представлены соответствующие эмпирические функции (в нормальном масштабе). Как и в случае оценок вязкости (см. рис. 2) создается впечатление, что различные функции распределения отличаются сдвигом вдоль оси абсцисс. И в данном случае аналог расстояния по Колмогорову также равен единице, что крайне маловероятно[11].

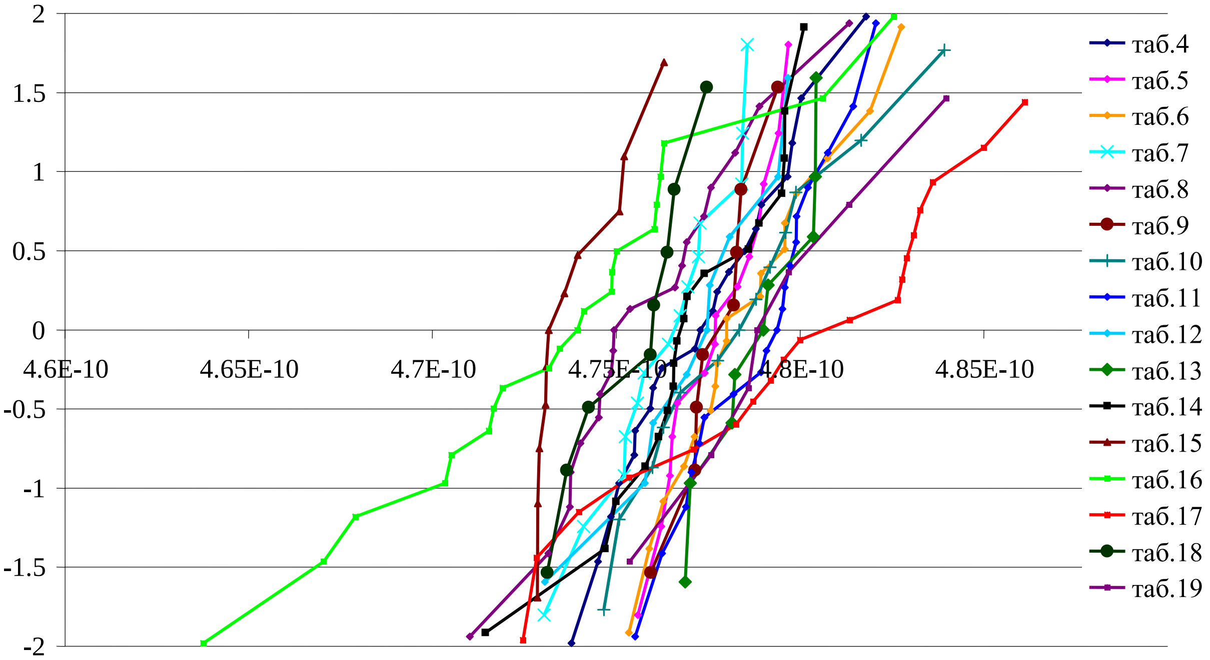

Рис. 5. Эмпирические функции распределения оценок заряда электрона при опытах с разными каплями (при вязкости η_{23}=1825×10^{-7}).

Другим способом исследования статистической однородности является сравнение эмпирических средних значений с известным точным значением. Если считать, что современное значение заряда электрона соответствует вязкости 1833×10^{-7} при 23^{0}С, то вязкости 1825×10^{-7} должно соответствовать значение e=4.7718×10^{-10}. Сравнение выборочных средних с этим последним значением с помощью распределения Стьюдента (как это общепринято) приводится в следующей таблице.

Таблица 7. Сравнение эмпирических средних значений заряда электрона в отдельных опытах с ожидаемым значением e=4.7718×10^{-10} (расчет при вязкости 1825×10^{-7})

№ таблицы	№ капли	Число наблюдений	Среднее значение заряда ×10^{10}	Нормированное отклонение	p-значение (Стьюдент)	-2×ln(p)
4	6	21	4.7728	0.2148	0.8333	0.3648
5	16	14	4.7773	1.5811	0.1323	4.0458
6	14	18	4.7849	2.7798	0.0156	8.3180
7	13	14	4.7636	-1.8675	0.0782	5.0969

[11] Напомним, что расстояние D вычисляется не в нормальном, а в обычном масштабе.

8	15	19	4.7572	-2.6784	0.0316	6.9083
9	17	8	4.7774	1.4967	0.1501	3.7932
16	1	21	4.7343	-4.0293	0.0050	10.5965
18	22	8	4.7543	-3.1987	0.0151	8.3871
10	42	13	4.7830	1.5308	0.1517	3.7712
11	46	19	4.7890	4.2169	0.0005	15.1294
12	53	9	4.7711	-0.1092	0.9157	0.1761
13	48	9	4.7885	3.5981	0.0070	9.9232
14	47	18	4.7704	-0.2780	0.7843	0.4858
15	41	11	4.7383	-9.4028	2.8E-06	25.5814
17	56	20	4.8100	2.7167	0.0137	8.5826
19	52	7	4.7934	2.0797	0.0828	4.9833
					Сумма	116.1436

Результат сравнения представлен в двух последних столбцах этой таблицы. В предпоследнем столбце даны p-значения, получаемые с помощью распределения Стьюдента по нормированной величине отклонения эмпирического среднего от ожидаемого значения. Теоретически эти числа должны представлять собой выборку из равномерного распределения на отрезке [0, 1]. В последнем столбце вычислены величины $(-2\ln p)$, которые в предположении статистической однородности (и нормального распределения результатов отдельных наблюдений) должны представлять собой выборку из распределения хи-квадрат с двумя степенями свободы. Эмпирическая функция распределения p-значений представлена на рис. 6. Ясно, что ни о каком равномерном распределении речи быть не может.

Сумма чисел последнего столбца равна 116.14. Это должно быть значением величины χ^2_{32}. Понятно, что столь большое значение крайне маловероятно.

Таким образом, при сравнении выборочных средних также отвергается гипотеза статистической однородности измерений Милликена.

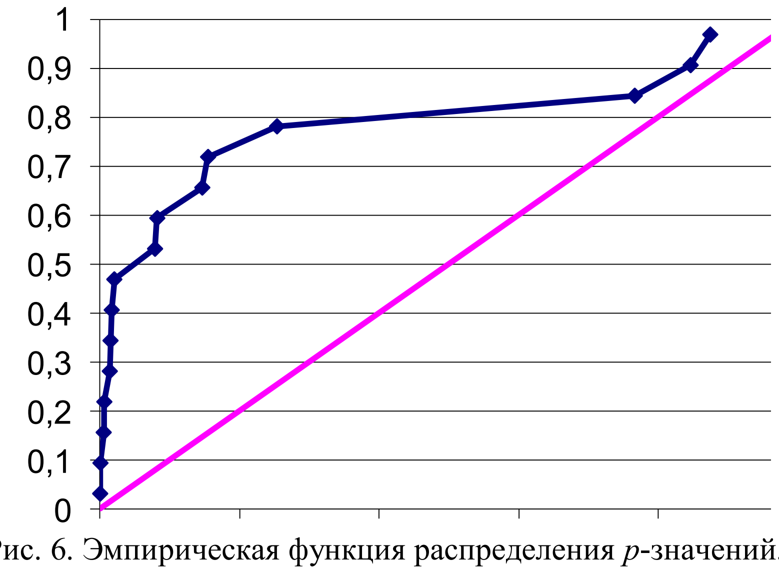

Рис. 6. Эмпирическая функция распределения p-значений.

Однако, как было показано ранее, если убрать арифметические ошибки и поправить значение вязкости, то в среднем из опытов Милликена мы получаем современное значение заряда электрона практически без смещения. Каким же образом компенсируется смещение результатов опытов над отдельными каплями? Это смещение может происходить только из-за ошибок измерения времени падения и подъема капли. В следующем пункте мы попытаемся исследовать эти ошибки.

9. Ошибки измерения времени подъема и падения капли

Первичными измерениями в эксперименте Милликена являются измерения времени падения и подъема капли. Зная точное значение заряда электрона и предполагаемое достаточно точным значение вязкости воздуха, можно рассчитать скорость движения капли и проверить, насколько хорошо (или плохо) объясняются первичные наблюдения с помощью значений этих параметров.

Для этого нужно определить радиус капли, что можно сделать путем сглаживания (линейной функцией активного времени) значений радиуса, полученных в отдельных наблюдениях над этой каплей. Учитывая, конечно, и поправку Милликена к закону Стокса, можно затем рассчитать время ее подъема и падения (при каждом измерении), которое мы называем *теоретическим.* Вычитая из измеренного времени (с учетом поправки хроноскопа) теоретическое время, мы получаем ошибку данного измерения времени. Конечно, это так называемая *кажущаяся ошибка,* поскольку радиус капли при любом сглаживании определяется не вполне точно (да и значение вязкости лишь предполагается точным). Однако представляет определенный интерес выяснить, допускают ли кажущиеся ошибки какое-то вероятностное описание.

В частности, предположим, что ошибка в наблюдаемых значениях времени падения и подъема капли связана лишь с колебаниями во времени реакции экспериментатора на наблюдаемое пересечение каплей той или иной риски в оптической системе. Тогда в идеале должны были бы выполняться следующие свойства ошибок измерения времени: среднее значение близко к нулю, а эмпирическая дисперсия по возможности мала и, во всяком случае, не зависит от величины измеряемого интервала времени.

Мы начинаем с ошибок в определении времени *падения* капли. В нижеследующей таблице 8 приведены средние значения и стандартные отклонения этих ошибок для каждой капли (использовано предполагаемое точным значение вязкости воздуха и современное значение заряда электрона).

Таблица 8. Характеристики кажущихся ошибок времени падения (сек)

№ таблицы в [6]	№ капли	число наблюдений	среднее теоретическое время падения	среднее значение кажущейся ошибки	стандартное отклонение кажущейся ошибки
4	6	21	11.876	-0.0021	0.04045
5	16	14	18.769	-0.0153	0.03972
6	14	18	18.777	-0.0353	0.06281
7	13	14	18.682	0.0205	0.05192
8	15	19	18.932	0.0392	0.07568
9	17	8	18.412	-0.0146	0.04639
10	42	13	18.383	-0.0330	0.07688
11	46	19	26.009	-0.0706	0.07786
12	53	9	33.417	-0.0100	0.11425
13	48	9	32.479	-0.0866	0.07948
14	47	18	12.889	-0.0018	0.04649
15	41	11	23.920	0.1297	0.05165
16	1	21	4.316	0.0238	0.02947

17	56	20	5.073	-0.0287	0.04657
18	22	8	40.535	0.0965	0.11411
19	52	7	50.650	-0.1709	0.22604

Из таблицы 8 видно, что *средние ошибки* довольно малы, как и стандартные отклонения. Например, для капли №6 среднее значение ошибки составляет всего около (-2/1000) секунды, при стандартном отклонении 0.04 сек. Получается, что зависящая от наблюдателя ошибка составляет величину порядка сотых долей секунды. Такое значение удивительно мало. Однако точность измерения 0.1% все же не достигается. Остается рассчитывать лишь на отсутствие систематических ошибок и усреднение результатов.

Стандартные отклонения явно нарастают с увеличением времени наблюдения. Этот факт не совмещается с гипотезой о том, что ошибка определяется лишь временем реакции экспериментатора.

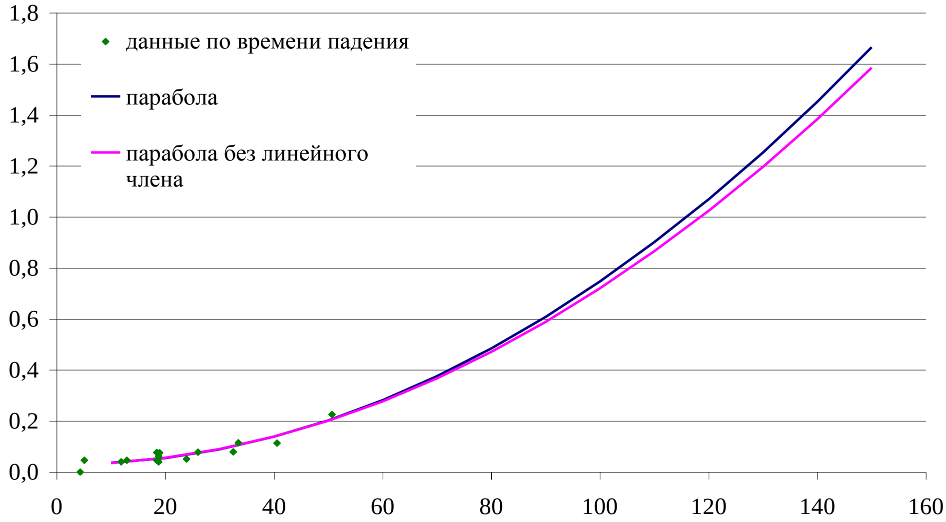

Рис. 7. Сглаживание и экстраполяция стандартных отклонений ошибок измерения времени падения в зависимости от теоретического времени падения.

Мы сгладили параболой эту зависимость с тем, чтобы попытаться экстраполировать ее в область гораздо больших значений времени наблюдения и применить для описания ошибок времени подъема капли. На рис. 7 графически изображены два варианта этого сглаживания: параболой второй степени и параболой той же степени без линейного члена.

В таблице 9 численно представлены результаты экстраполяции. Было установлено, что более удачной является экстраполяция с помощью полной параболы, уравнение которой следующее:

ст. отклонение = 0.03186 -0.00031639×(теор. вр.) + 7.47034×10^{-5}×(теор. вр.)^2.

Таблица 9. Экстраполяция стандартных отклонений кажущихся ошибок.

Теоретическое время наблюдения (сек)	Парабола	Парабола без линейного члена
10	0.0362	0.0353
20	0.0554	0.0560
30	0.0896	0.0906
40	0.1387	0.1390

50	0.2028	0.2013
60	0.2818	0.2774
70	0.3758	0.3673
80	0.4847	0.4710
90	0.6085	0.5886
100	0.7473	0.7200
150	1.6652	1.5846
200	2.9567	2.7949
250	4.6217	4.3511
300	6.6603	6.2532
350	9.0723	8.5010
400	11.8579	11.0947
450	15.0169	14.0342
500	18.5495	17.3195
550	22.4556	20.9506
600	26.7353	24.9275

Для подтверждения удачности этой экстраполяции было сделано следующее. Кажущиеся ошибки измерения времени подъема были разделены на их стандартные отклонения, определяемые подстановкой в параболу значения соответствующего теоретического времени. В идеальной ситуации (отсутствие систематических ошибок и правильность нормировки) должна получиться выборка из закона (желательно нормального) со средним 0 и дисперсией 1. На рисунках 8 и 9 представлены в нормальном масштабе соответствующие эмпирические функции распределения.

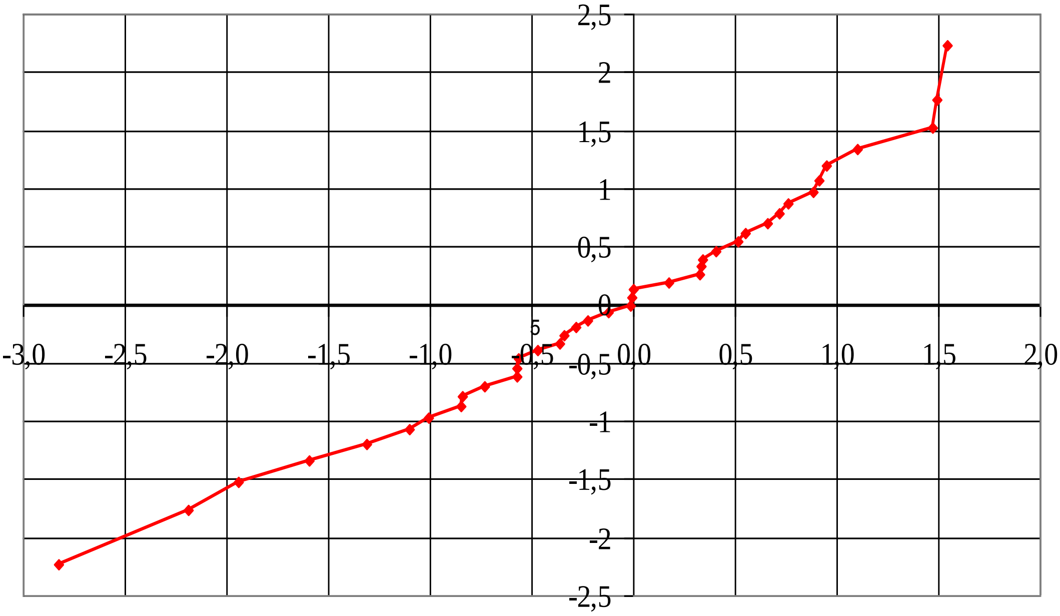

Рис. 8. Эмпирическая функция распределения
нормированных ошибок определения времени подъема
(39 наблюдений, имеющих теоретическое время подъема больше 80 сек).

Эмпирическая функция, изображенная на рис. 8 достаточно сходна с теоретическим идеалом стандартного нормального распределения.

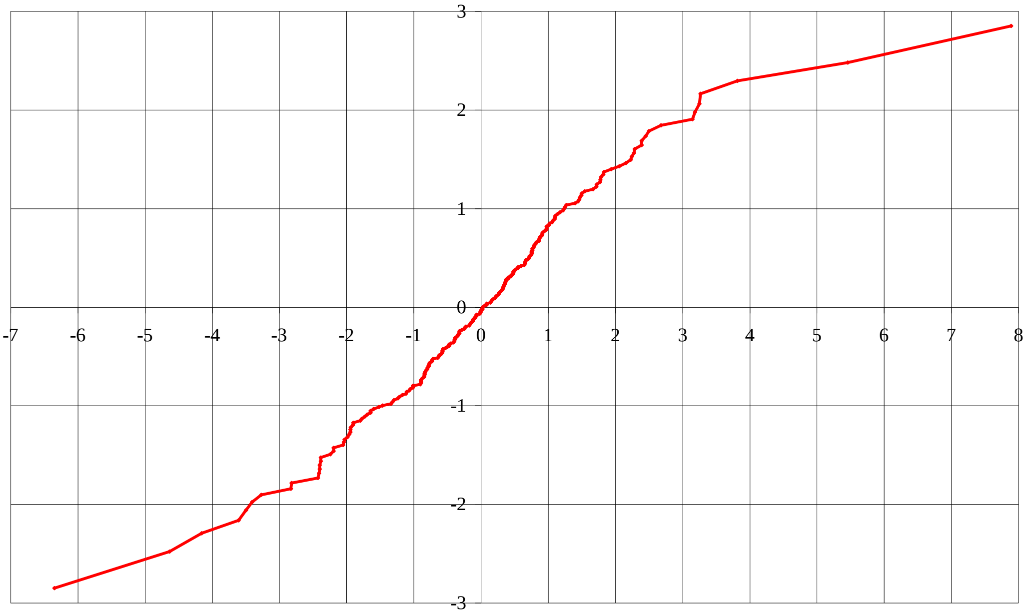

Рис. 9. То же, что на рис. 8, но для всех 229 наблюдений времени подъема.

На рис.9 центральная часть эмпирической функции распределения достаточно сходна со стандартным нормальным законом, но имеются «тяжелые хвосты». Эти хвосты, как оказалось, не связаны с большими ошибками при измерении больших интервалов времени подъема: они соответствуют умеренным значениям этой величины.

В целом подтверждается правильность предложенной нормировки, хотя бы по порядку величины. Таким образом, быстрый рост ошибок определения времени падения и подъема капли с возрастанием самого этого времени устанавливается достаточно надежно. Например, из таблицы 9 видно, что при времени подъема порядка 500 сек можно ожидать ошибки его определения порядка одного-двух десятков секунд. Такие ошибки действительно имеются в данных. Ошибка такой величины не может иметь своей причиной невнимательность наблюдателя. Она должна быть приписана нестабильному состоянию экспериментальной установки. Однако медианы выборок, представленных на рис. 8 и 9, близки к нулю, что свидетельствует в пользу отсутствия систематических ошибок при измерении времени (если теоретическое время рассчитывать, исходя из современного значения заряда электрона и вязкости $\eta_{23} = 1833\times10^{-7}$).

Но этот благоприятный с точки зрения математической статистики вывод, конечно, разваливается при анализе результатов по отдельным каплям. Эти результаты представлены для нормированных ошибок времени падения на рис. 10, а для времени подъема на рис. 11.

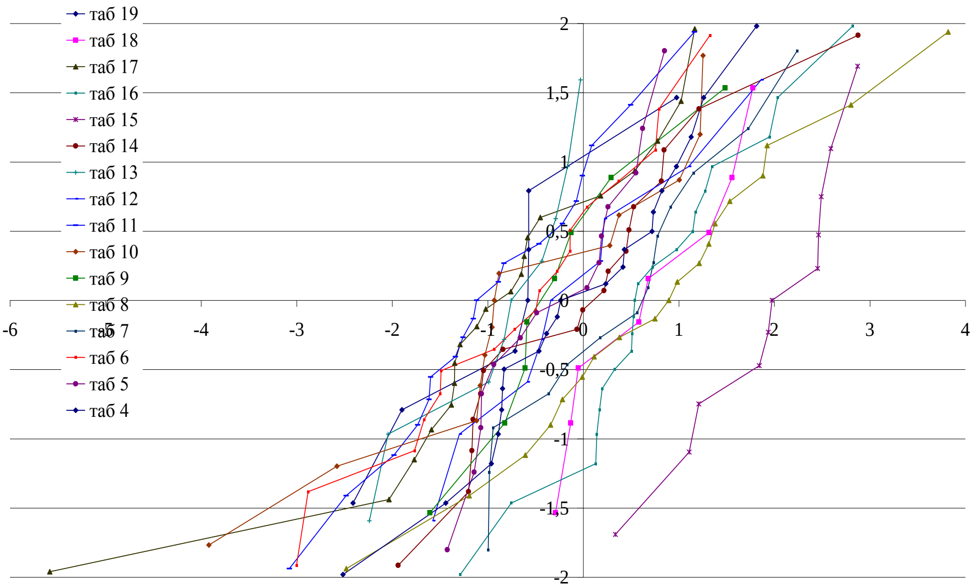

Рис.10. Эмпирические функции распределения нормированных ошибок времени падения по различным каплям.
Аналог статистики Колмогорова-Смирнова D = 1.

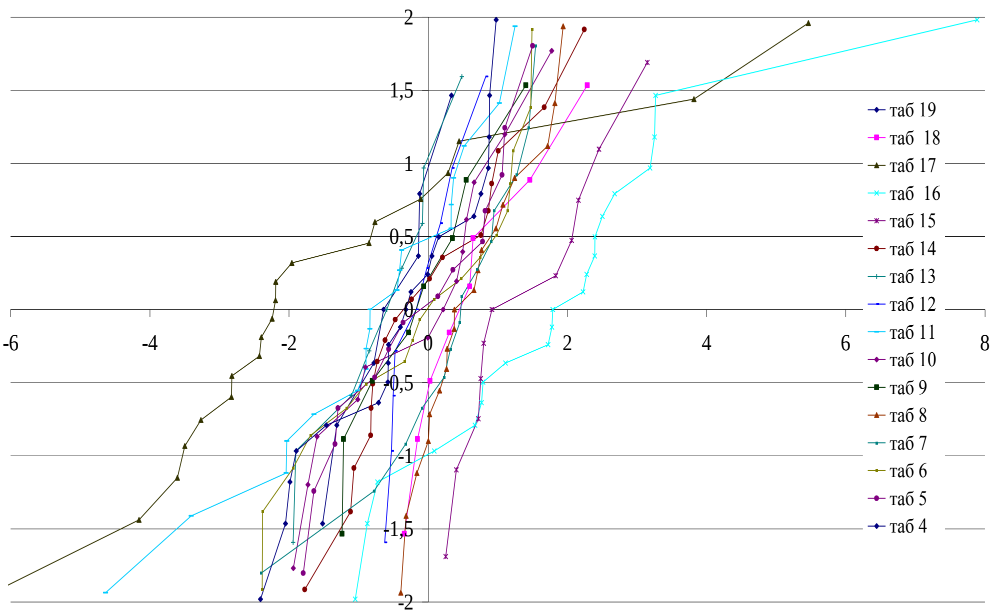

Рис 11. То же, что на рис. 10, но для времени подъема. D = 0.909.

Понятно, что данные, представленные на рисунках 10 и 11, не могут рассматриваться как статистически однородная выборка.

Возникает вопрос, можно ли с помощью математической статистики сделать вывод о том, что современные параметры чем-то лучше, чем те параметры, на которых в конце концов остановился Милликен (т.е. $e = 4.774\times10^{-10}$, $\eta_{23} = 1824\times10^{-7}$). С целью ответить на этот вопрос мы рассчитали теоретическое время подъема и падения (и, соответственно, кажущиеся ошибки наблюдений) с параметрами Милликена. Нормировочные множители для ошибок мы оставили прежними. Эмпирические функции для нормированных ошибок представлены на рис. 12 и 13. Из этих рисунков видно, что, во-первых, произведенная нами нормировка удовлетворительна и, во-вторых, современные параметры приводят к уменьшению систематических ошибок.

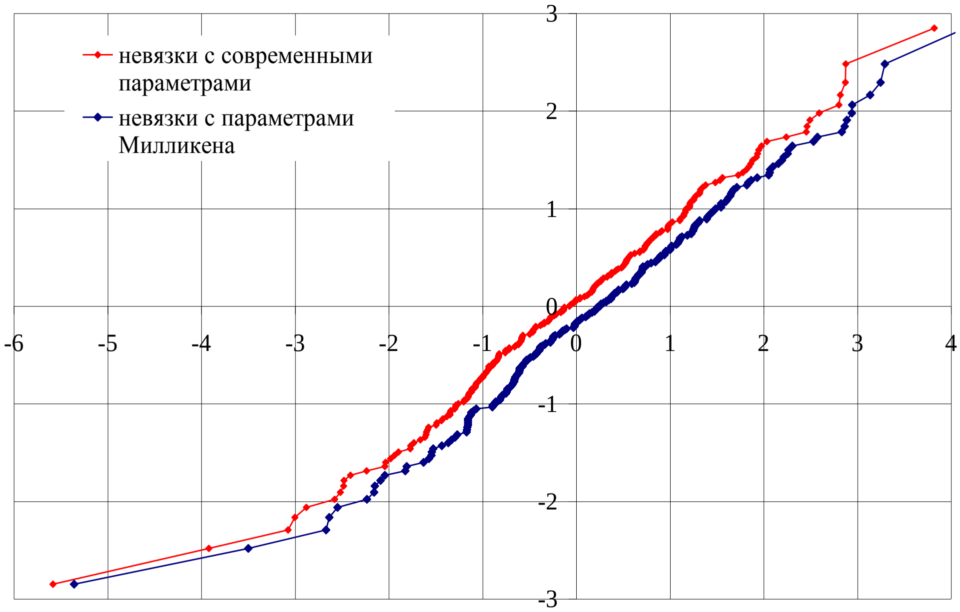

Рис 12. Сравнение нормированных ошибок (невязок) в измерении времени падения при вычислении теоретического времени с параметрами Милликена и современными параметрами.

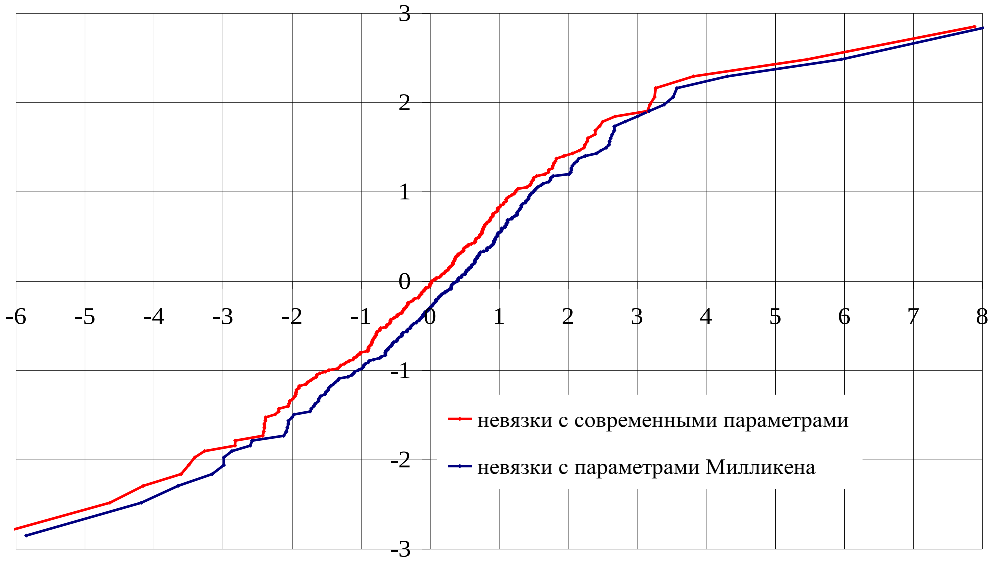

Рис. 13. То же, что на рисунке 12, но для времени подъема.

Вывод о лучшем соответствии современных параметров наблюденному времени можно получить и не используя нормировочных множителей и эмпирических функций. Отсутствие систематических ошибок можно интерпретировать как примерно одинаковое количество положительных и отрицательных кажущихся ошибок. Для проверки статистической значимости напрашивается схема Бернулли, в которой число испытаний $n = 229$, а вероятность успеха $p = ½$. Ожидаемое число успехов есть 114.5, а стандартное отклонение равно $(57.25)^{1/2} = 7.57$. Результаты проверки сведены в таблицу:

Таблица 10. Сравнение нормированных невязок падения и подъема с помощью схемы Бернулли

	параметры Милликена		современные параметры	
	нормиров. невязки падения	нормиров. невязки подъема	нормиров. невязки падения	нормиров. невязки подъема
число отрицательных	98	86	121	106

Видно, что данные Милликена дают отклонения от ожидаемого числа более, чем на два стандартных отклонения, а современные данные – порядка одного. Первое статистически значимо, а второе – нет.

Спрашивается, должен ли был повременить с премией Милликену Нобелевский комитет, если бы какой-нибудь враг (предположительно, Эренхафт) представил левую половину этой таблицы (правую половину еще невозможно было представить в 1923 году)?

Нет, конечно. При рассмотрении данных по отдельным каплям (рисунки 14 и 15) становится ясным, что схема Бернулли (как теоретическая основа для вычисления значимости) применяться не может.

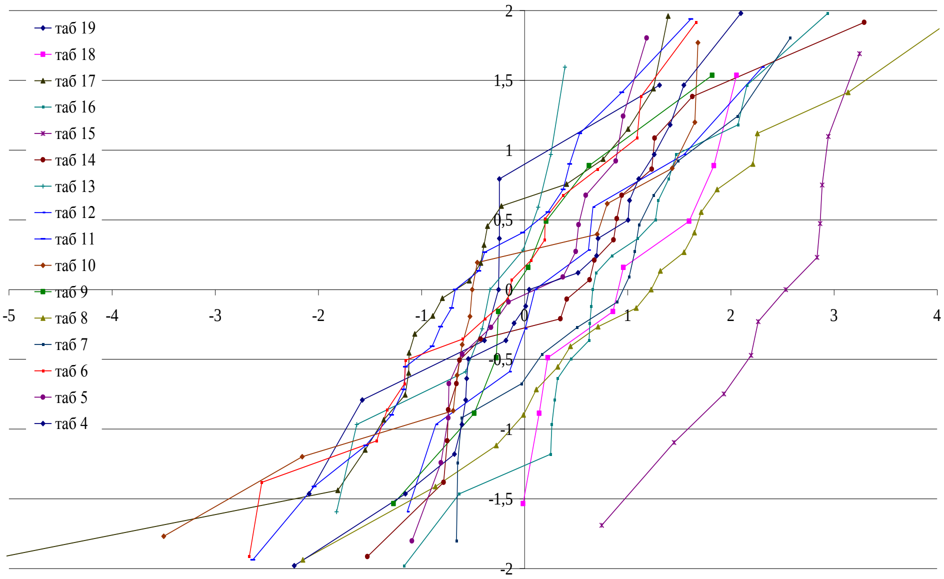

Рис. 14. Нормированные невязки времени падения с параметрами Милликена.

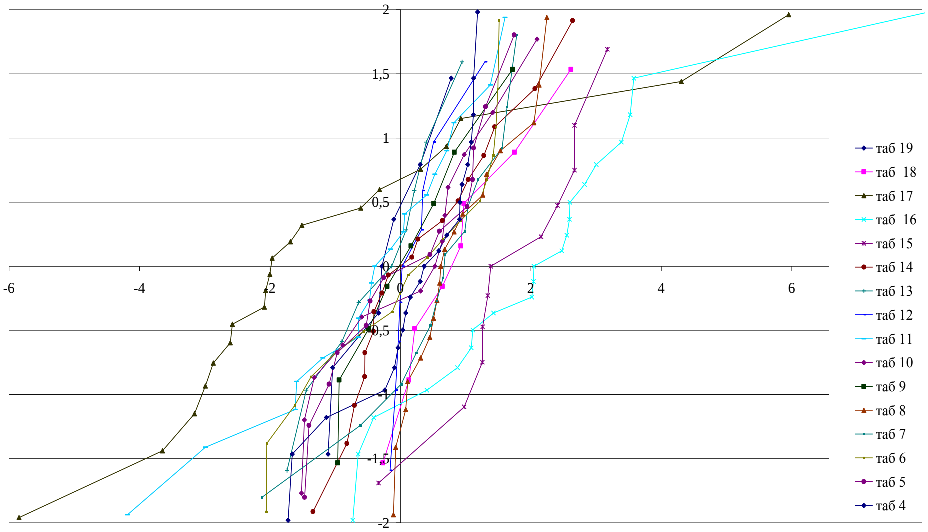

Рис. 15. Нормированные невязки времени подъема с параметрами Милликена.

10. Резюме

Итак, Милликен согрешил: представил не все экспериментальные данные, хотя написал в работе [6], что представил все. Возник великий историко-научный спор – морально поступил он или аморально. На наш взгляд, речь не может идти о страхе перед критикой Эренхафта (потому что в опубликованных данных Милликена все равно можно при желании найти субэлектроны). Еще менее вероятно то, что речь может идти о подгонке под заданный ответ (поскольку совершенно не было известно, под какой именно ответ надо подгонять значение заряда электрона). По-видимому, причина в другом: аппарат Милликена работал недостаточно стабильно (если речь идет о достижении точности порядка 0.1%). Ошибки в измерении интервалов времени (насколько их можно оценить с помощью кажущихся ошибок) росли пропорционально квадрату измеряемого интервала. Это могло случиться только за счет возникновения каких-то помех в аппарате (упоминаются, в частности, конвективные движения воздуха). Понятно, что Милликен должен был отбирать такие эксперименты, которые казались ему получившимися достаточно хорошо. Вот он и отобрал 58 капель, причем сделал это не с полной тщательностью, поскольку на одном из его чертежей показано два результата, которых нет в итоговой таблице XX. Впрочем, Милликена и нельзя считать эталоном любви к порядку - будь то на лабораторном столе или в арифметических вычислениях. Зато он мерил интервалы времени с точностью до нескольких сотых долей секунды (если не мешало что-то происходившее в аппарате).

Из 58 капель Милликен отобрал 16, для которых опубликовал первичные данные, которые и являются предметом анализа в настоящей работе. Можно предположить, что отбор этих капель определялся двумя обстоятельствами: надо было, чтобы соответствующий эксперимент хорошо получился (по субъективному ощущению Милликена), и еще надо было продемонстрировать правильность предложенной им поправки к закону Стокса.

При использовании статистических методов важно проверить статистическую однородность исходных данных. Для этого необходимо разбить данные на какие-то группы, которые и сравнивать между собой. Обычно непонятно, как следует выбирать группы. Но в данном случае разбивка на группы задана естественно: каждая группа – это результаты, относящиеся к одной и той же капле. Как бы мы ни сравнивали капли по результатам вычислений: будь то вязкость воздуха (при известном заряде электрона); заряд электрона (при известной вязкости); ошибки измерения времени подъема и падения капли (при известных заряде электрона и вязкости) – мы неизменно обнаруживаем, что данные статистически неоднородны.

Но вот в чем чудо. Если рассматривать вместе данные по разным каплям, считая их статистически однородными, и вычислять что-нибудь по формальным правилам математической статистики, то получается верный результат и притом с такой точностью, которая предписывается этими правилами. Средневзвешенное значение вязкости воздуха (при современном значении заряда электрона) совпадает с данными справочника [4] примерно с точностью до одной среднеквадратической ошибки (вычисленной по формальным правилам). Если уточнить заряд электрона при начальных параметрах Милликена $e = 4.78\times10^{-10}$, $\eta_{23} = 1825\times10^{-7}$, а потом пересчитать его на значение $\eta_{23} = 1833\times10^{-7}$, то получится современное значение e с точностью не хуже рассчитанной по правилам статистики. (И не хуже, чем 0.1%). При этом две группы по 8 капель (одна - с малой поправкой к закону Стокса, а другая – с большой поправкой) дают близкие результаты. А это есть свидетельство в пользу правильности поправки Милликена к закону Стокса.

Несмотря на «чудесный» результат Милликена, возникает все же серьезное сомнение в оправданности построения доверительного интервала (т.е. формального применения статистических методов). Однако более тонкое применение методов математической статистики обнаруживает рост ошибок измерений с увеличением измеряемого интервала времени, позволяет выявить нестабильность измерительной установки, дает возможность описать характер этой нестабильности и объяснить (хотя бы частично) отбор Милликеном экспериментов для окончательной обработки.

Цитированная литература

1. Криз Р. Призма и маятник. Десять самых красивых экспериментов в истории науки. Пер. с англ. М., АСТ, 2014.
2. Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической обработки наблюдений. Изд. второе. М., Физматгиз, 1962.
3. Мешалкин Л.Д. Сборник задач по теории вероятностей. М., изд-во МГУ, 1963.
4. Эберт Г. Краткий справочник по физике. М., Физматгиз, 1963. (Перевод с немецкого издания 1957 года)
5. Millikan R.A. The isolation of an ion, a precision measurement of its charge, and the correction of Stokes's law. Phys. Rev., 1911, v.32, pp. 349 - 397.
6. Millikan R.A. On the elementary electric charge and the Avogadro constant. Phys. Rev., 1913, v.2, 109 - 143.
7. Kadoya K., Matsunaga N., Nagashima A. Viscosity and thermal conductivity of dry air in the gaseous phase//J. Phys.Chem. Ref. Data, 1985, Vol.14, N4, pp. 947 - 970.
8. Holton G. The scientific imagination: case studies. Cambridge Univ. Press, 1978.
9. Goodstein D. In defense of Robert Andrews Millikan. Engeneering&Science, 2000. no. 4, pp. 30 - 38.
10. Franklin A. Millikan's published and unpublished data on oil drops. Historical studies in the physical sciences, 1981, v.11, N2, pp.185 - 201.
11. Уилсон М. Американские ученые и изобретатели. М., Знание, 1975, 136с.

ПРИЛОЖЕНИЕ
Перечень изменений, внесенных авторами в таблицы IV - XIX работы [6], которые содержат результаты первичных измерений

Первичными измерениями являются измерения времени падения t_g и времени подъема t_F капли, а также выводимое с их помощью количество n элементарных зарядов, которое имела капля во время ее подъема под действием электрического поля. Вспомогательной величиной является n' - число, на которое изменяется количество зарядов при различных подъемах капли.

Таблицы Милликена имеют некоторые пропуски. Те случаи, когда не указывается время подъема капли, мы отбросили. Если же указывается время подъема, но не указывается время падения, то время падения мы заменяли средним из указанных времен падения. В общей сложности во всех 16 таблицах получилось 229 наблюдений.

Таблицы IV - VII, IX, X, XII, XIII, XIX - никакие изменения не вносились, кроме исправления очевидной опечатки в таблице V.

Таблица VIII. В этой таблице не указаны числа зарядов n, мы их вычислили самостоятельно путем деления величины $(1/t_g + 1/t_F)$ на среднее значение величины $\frac{1}{n}(1/t_g + 1/t_F)$, равное 0.006823, указанное Милликеном и округления до ближайшего целого числа. В данном случае результаты никаких сомнений не вызывали.

Таблица XI. В тринадцатом и следующих измерениях значения n не указаны, но по указанным значениям изменений n' эти значения уверенно восстанавливаются.

Таблица XIV. В третьем измерении указано значение t_F=10.704 сек. Значению n=42 оно отвечать не может. Для него определяется n=44, но это определение неуверенное. По-видимому, Милликен этого наблюдения вообще не использовал (в таблице не указано соответствующее значение $\frac{1}{n}(1/t_g + 1/t_F)$). Поэтому мы решили это наблюдение отбросить.

Таблица XV. В первых трех измерениях указано значение n=8. Путем сравнения с остальными числами таблицы с несомненностью устанавливается, что это опечатка. Вместо него мы поставили n=7.

Таблица XVI. В восьми измерениях этой таблицы не указано время падения, а в одном измерении - время подъема. Последнее измерение мы отбросили. Не указанные времена падения заменили на скорректированное Милликеном значение t_g=4.328 и дальнейшей коррекции (согласно п.4) не подвергали. В данном случае редактирование не совсем уверенное, потому что для столь коротких времен падения капли нет данных о поправке хроноскопа. Кроме того, в таблице XX вместо t_g=4.328 указано нескорректированное среднее значение времен падения 4.363. Значение радиуса капли a, указанное в таблицах XVI и XX, грубо ошибочно.

Таблица XVII. Это сложный случай, потому что капля несет много (более сотни) элементарных зарядов. Поэтому проверить с полной точностью указываемые Милликеном числа n не удается. Однако, начиная с десятого наблюдения имеется очевидная опечатка: при вычитании из n=122 числа n'=7 получено значение 117 (вместо 115). Эта ошибка перешла и в следующие наблюдения и была нами исправлена. Кроме того, не указано время падения в измерениях №№5,6,9, 19, 20. Эти не указанные значения мы замещаем средним по указанным значениям, которое равно 5.058 сек с последующей поправкой согласно п.4, т.е. 5.044 сек. (Милликен предлагает, насколько мы поняли, все значения времени падения заменить скорректированной величиной 5.039 сек, но такая замена не вполне согласуется с указанным в таблице числом зарядов.)

Таблица XVIII. Во втором наблюдении опечатка в значении n=3. Должно быть n=4, что согласуется с остальными данными таблицы.